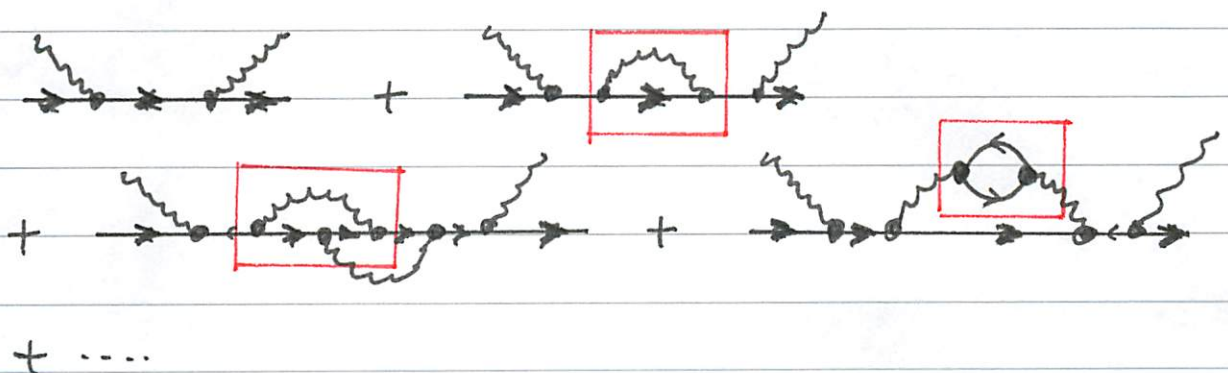


V. Renormierung der QED

Wir wenden uns jetzt der Frage zu wie die in höheren Ordnung Störungstheorie auftretenden Blasen diagramme zu berechnen sind. Wir werden sehen, daß diese formal divergieren. Die QED liefert trotzdem sinnvolle Resultate da wir zeigen werden, daß die Divergenzen beseitigt werden können. Dies erfolgt in zwei Schritten

- (i) Regularisierung = Abspalten der Divergenzen
- (ii) Renormalisierung = Formale Absorption der divergenten Ausdrücke in die Parameter der Theorie $m, e, \dots$

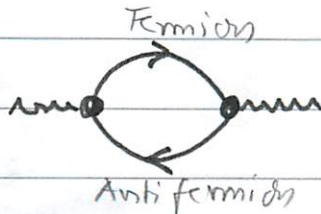
Beispiel: Coulomb-Streuung einige ausgewählte Terme



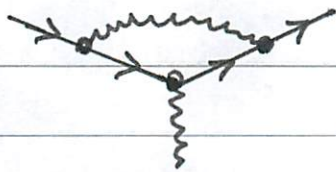
Wir sehen, daß hier 3 Grundtypen von Blasen - diagrammen auftreten:



Selbstenergie des
Elektrons (Fermion)

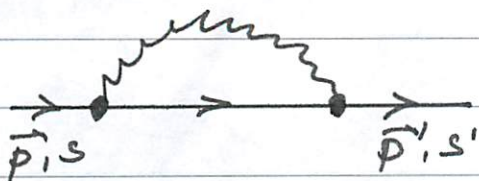


Vakuumpolarisation



Vertexkorrektur

V.1. Selbstenergie des Elektrons



$$M_{\Sigma} = \bar{u}(\vec{p}', s') \Sigma(p) u(\vec{p}, s)$$

$$\Sigma(p) = -ie^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\gamma^{\mu} (m + \not{p} - \not{k}) \gamma_{\mu}}{(-k^2 - i\epsilon)(m^2 - (p-k)^2 - i\epsilon)}$$

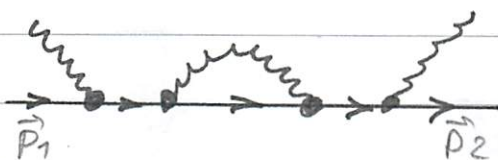
$\int d^4 k$ über alle k^{μ} auch außerhalb Energieshell

Man erkennt leicht, daß dieses Integral nicht konvergent ist, da für $k \rightarrow \infty$

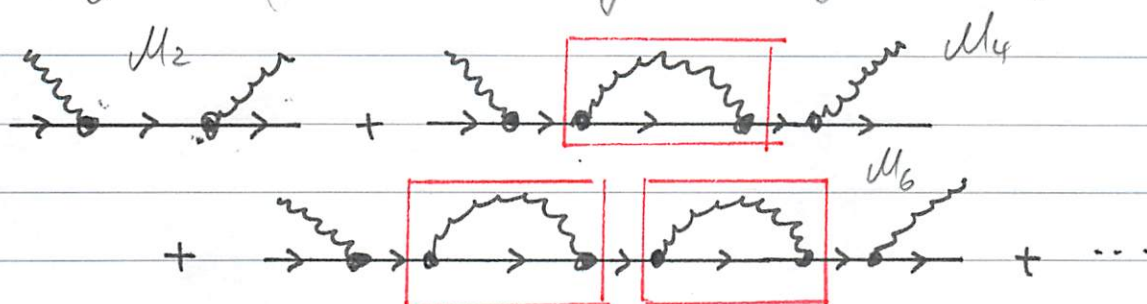
$$\int d^4 k \frac{k}{k^4} \sim \int_0^{\infty} dk \rightarrow \infty \quad \text{gilt.}$$

Bevor wir uns mit der Renormierung von $\Sigma(p)$ befassen, wollen wir sehen welche Bedeutung $\Sigma(p)$ hat.

Dazu bemerken wir, daß es zu jedem Diagramm der Form



Beiträge in höherer Ordnung Störungstheorie gibt



Alle diese Beiträge können formal aufsummiert werden

$$\mathcal{M}_2 = -ie^2 \bar{u}(\vec{p}_2) \not{\epsilon}_f iS(p) \not{\epsilon}_i u(\vec{p}_1)$$

$$\mathcal{M}_4 = -ie^2 \bar{u}(\vec{p}_2) \not{\epsilon}_f iS(p) (-i\Sigma(p)) iS(p) \not{\epsilon}_i u(\vec{p}_1)$$

$$\mathcal{M}_6 = -ie^2 \bar{u}(\vec{p}_2) \not{\epsilon}_f iS(p) (-i\Sigma(p)) iS(p) (-i\Sigma(p)) iS(p) \not{\epsilon}_i u(\vec{p}_1)$$

$$\mathcal{M} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}_{2n} = -ie^2 \bar{u}(\vec{p}_2) \not{\epsilon}_f iS'(p) \not{\epsilon}_i u(\vec{p}_1)$$

wobei $S'(p)$ der dressed propagator (wechselwirkender Propagator, voller Elektronen propagator) ist

$$iS'(p) = iS(p) \left[1 + \Sigma(p)S(p) + \Sigma(p)S(p)\Sigma(p)S(p) + \dots \right]$$

$$iS'(p) = iS(p) + iS(p)\Sigma(p)S'(p)$$

Dyson Gleichung für e-Propagator *

$$\Rightarrow = \rightarrow + \rightarrow \text{ (with loop) } \Rightarrow$$

Bem: Wir werden später sehen, daß es in höherer Ordnung noch andere Beiträge zum vollen Elektronenpropagator gibt

$$iS'(p) = iS(p) \frac{1}{1 - \Sigma(p)S(p)} = \frac{1}{1 - S(p)\Sigma(p)} iS(p)$$

$\Sigma(p)$ ist eine 4×4 Diracmatrix und ein Lorentzskalar, d.h.

$$\Sigma(p) = m A(p^2) + \not{p} B(p^2)$$

wobei $A(p^2), B(p^2)$ Skalare sind

$$\Rightarrow [\Sigma(p), S(p)] = 0$$

und somit

$$iS'(p) = \frac{-i}{m - \not{p} + \Sigma(p) - i\varepsilon}$$

Wir werden jetzt zeigen, daß $\Sigma(p)$ zwei Dinge tut:

- (i) Modifikation der Masse $m \rightarrow \bar{m}$
- (ii) Modifikation der Normierung des Propagators

Entwicklung von $\Sigma(p) = \Sigma(\not{p})$ in Taylorreihe
in $(\not{p} - \bar{m})$

$$\Sigma(\not{p}) = \Sigma(\bar{m}) + (\not{p} - \bar{m}) \Sigma'(\bar{m}) + \frac{1}{2} (\not{p} - \bar{m})^2 \Sigma''(\bar{m}) + \dots$$

$$= \Sigma(\bar{m}) + (\not{p} - \bar{m}) \Sigma'(\bar{m}) + \Sigma_R(\not{p})$$

wobei $\Sigma'(\bar{m}) = \frac{d\Sigma}{d\not{p}} \Big|_{\not{p}=\bar{m}}$ Skalar ist. Einsetzen liefert

$$iS'(\not{p}) = \frac{-i}{\underbrace{m + \Sigma(\bar{m})}_{\equiv \bar{m}} - \not{p} + (\not{p} - \bar{m}) \Sigma'(\bar{m}) + \Sigma_R(\not{p}) - i\varepsilon}$$

d.h. $\boxed{\bar{m} \equiv m + \Sigma(\bar{m})}$

$$iS'(\not{p}) = \frac{-i}{\underbrace{\bar{m} (1 - \Sigma'(\bar{m})) - \not{p} (1 - \Sigma'(\bar{m}))}_{\frac{1}{Z_2}} + \Sigma_R(\not{p}) - i\varepsilon}$$

d.h. $\boxed{Z_2 \equiv \frac{1}{1 - \Sigma'(\bar{m})}}$

$$\boxed{iS'(\not{p}) = \frac{-i Z_2}{\bar{m} - \not{p} + Z_2 \Sigma_R(\not{p}) - i\varepsilon}}$$

— 178 — $\uparrow$ nur für Störabweichungen
($\not{p} - m$) relevant

Wir zeigen jetzt, daß der Pol von $S'(p)$ bei $\bar{m}$ liegt, d.h. daß $\bar{m}$ als renormierte Masse betrachtet werden kann.

dazu $\Sigma_R(p) = (\not{p} - \bar{m})^2 R$ $R \neq 0$ für $\not{p} = \bar{m}$

$\Rightarrow$

$$iS'(p) = \frac{-i(\bar{m} + \not{p})Z_2}{(\bar{m}^2 - p^2)[1 + (\bar{m} - \not{p})Z_2 R]}$$

d.h. $S'(p)$ hat einen Pol bei $p^2 = \bar{m}^2$

außerdem, da $\not{p} = \bar{m} + \frac{p^2 - \bar{m}^2}{\not{p} + \bar{m}} = \bar{m} + \mathcal{O}(p^2 - \bar{m}^2)$

ist $S'(p)$ in der Nähe des Pols

$$iS'(p) \xrightarrow{p^2 \rightarrow \bar{m}^2} \frac{-i(\bar{m} + \not{p})Z_2}{\bar{m}^2 - p^2} = \frac{-iZ_2}{\bar{m} - \not{p}}$$

D.h. Σ_R ist vernachlässigbar in der Nähe des Pols und S' unterscheidet sich von S durch $m \rightarrow \bar{m}$ (Massenrenormierung) und $-i \rightarrow -iZ_2$ (Renormierung der Amplitude)

Weiteres Vorgehen

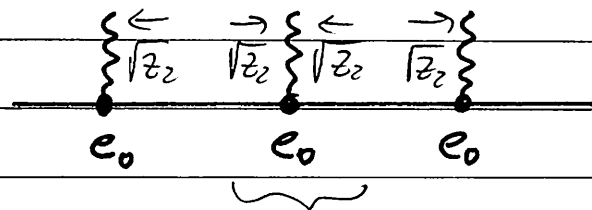
$\bar{m} \rightarrow$ physikalische Elektronenmasse
 $\rightarrow$ später

$Z_2 \rightarrow$ aus Theorie eliminieren

Eliminierung von Z_2 : Wellenfunktionsrenormalisierung

• innere Elektronenlinien $Z_2 \rightarrow \sqrt{Z_2} \sqrt{Z_2}$

$\sqrt{Z_2}$ für jede Ladung am Ende des Propagators



$$e_0 \rightarrow \sqrt{Z_2} e_0 \sqrt{Z_2} = Z_2 e_0$$

*

• externe Elektronenlinie: Faktor $\sqrt{Z_2}$

Regel (XI) für Feynmandiagramme:

für jede externe Fermionenlinie multipliziere man mit $\sqrt{Z_2}$

phys. Hintergrund: auch in den Prozessen die zur Erzeugung einer e^- (e^+) in einem bestimmten input Quantenzustand führen muß die Wellenfunktionsrenormalisierung durchgeführt werden.

Bem: (*) ist noch nicht die Ladungsrenormierung, es wird noch weitere Beiträge geben

IV.2. Vakuum polarisation



$$M_{\pi} = \epsilon_{\mu f}^* \pi^{\mu\nu}(q) \epsilon_{\nu i}$$

Summe über alle Spins der
internen Fermionenzustände

$$\pi^{\mu\nu}(q) = -ie^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{\text{Tr}\{\gamma^\mu(m+\not{p})\gamma^\nu(m+\not{p}-\not{q})\}}{(m^2-p^2-i\epsilon)(m^2-(p-q)^2-i\epsilon)}$$

-1 da geschlossene Fermionenzustände

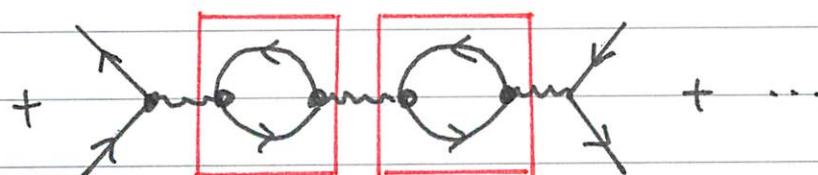
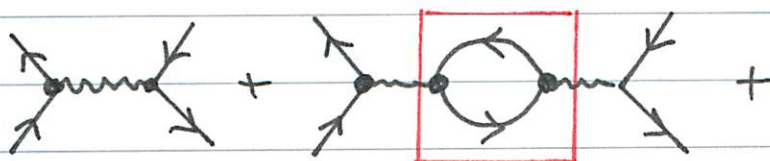
Auch dieses Integral ist UV-divergent da es Beiträge

$$\int d^4 p \frac{p^2}{p^4} \sim \int dp p \rightarrow \infty$$

enthält. Auch hier sehen wir, daß es zu jedem Diagramm der Form



Beiträge in höherer Ordnung der Störungstheorie gibt:



(*)

Bei der Diskussion der expliziten Berechnung der divergenten Integrale werden wir zeigen, daß gilt

$$\pi^{\mu\nu}(q) = (g^{\mu\nu} q^2 - q^\mu q^\nu) \pi(q^2)$$

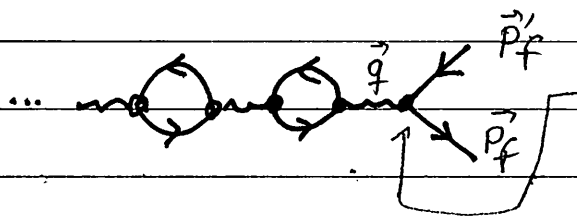
wobei $\pi(q^2)$ ein Skalar ist

$$\Rightarrow q_\mu \pi^{\mu\nu} = \pi^{\mu\nu} q_\nu = 0$$

Analog zur Diskussion der Selbstenergie des Elektrons können die Beiträge in (*) zur Vakuumpolarisation aufsummiert werden. Dazu verwenden wir

$$\begin{aligned} & \frac{i g^{\mu\lambda}}{-q^2 - i\varepsilon} (g_{\lambda\lambda'} q^2 - q_\lambda q_{\lambda'}) \pi(q^2) \frac{i g^{\lambda'\nu}}{-q^2 - i\varepsilon} \\ &= \frac{i}{-q^2 - i\varepsilon} (g^{\mu\nu} q^2 - \underbrace{q^\mu q^\nu}_{\nearrow}) \pi(q^2) \frac{i}{-q^2 - i\varepsilon} = \frac{i g^{\mu\nu}}{-q^2 - i\varepsilon} \frac{q^2 \pi(q^2)}{q^2} \end{aligned}$$

Die Terme $\sim q^\mu q^\nu$ verschwinden am Ende wenn sie mit Fermion - Antifermion Linien kontrahiert werden



$$\begin{aligned} & \bar{u}(\vec{p}_f) \gamma^\mu v(\vec{p}_f') q_\mu \\ & \quad \text{4-Impulskontak} \\ &= \bar{u}(\vec{p}_f) \gamma^\mu v(\vec{p}_f') (p_f - p_f')_\mu \end{aligned}$$

$$= \bar{u}(\vec{p}_f) (\not{p}_f - \not{p}_f') v(\vec{p}_f') = \bar{u}(\vec{p}_f) (m - m) v(\vec{p}_f') = 0$$

D.h.

$$\begin{aligned} iD'^{\mu\nu}(q) &= iD^{\mu\nu}(q) + iD^{\mu\nu}(q)(-\pi(q^2)) \\ &\quad + iD^{\mu\nu}(q)(-\pi(q^2))(-\pi(q^2)) + \dots \\ &= iD^{\mu\nu}(q) [1 - \pi(q^2) + (\pi(q^2))^2 - \dots] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} iD'^{\mu\nu}(q) &= iD^{\mu\nu}(q) \frac{1}{1 + \pi(q^2)} \\ &= \frac{ig^{\mu\nu}}{-q^2 - i\varepsilon} \frac{1}{1 + \pi(q^2)} \end{aligned}$$

Bem: • Der Pol des wechselwirkenden Photonenpropagators $D'(q)$ ist immer noch bei $q^2 = 0$. Eichinvarianz erlaubt keine Erzeugung einer endlichen Masse

Entwicklung von $\pi(q^2)$ um den Pol $q^2 = 0$

$$\pi(q^2) = \pi(0) + \bar{\pi}(q^2) \quad \text{mit} \quad \bar{\pi}(0) = 0$$

$$Z_3 \equiv \frac{1}{1 + \pi(0)} \quad \text{Renormierungskonstante}$$

$$iD'^{\mu\nu}(q^2) = \frac{ig^{\mu\nu}}{-q^2 - i\varepsilon} \frac{Z_3}{1 + Z_3\bar{\Pi}(q^2)}$$

- $\Rightarrow$ (i) keine Massenrenormierung (Erzeugung)
 (ii) Modifikation der Normierung des Propagators

nur für
 hohe q^2
 relevant

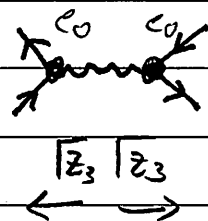
in der Nähe des Poles

$$iD'^{\mu\nu}(q^2) \xrightarrow{q^2 \rightarrow 0} \frac{ig^{\mu\nu}Z_3}{-q^2 - i\varepsilon}$$

Eliminierung von Z_3 :

- innere Photonenlinien $Z_3 \rightarrow \sqrt{Z_3}\sqrt{Z_3}$

$\sqrt{Z_3}$ für jede Ladung am Ende des Propagators



$$e_0 \rightarrow Z_2 \sqrt{Z_3} e_0$$

- externe Photonenlinien Faktor $\sqrt{Z_3}$

Regel XII für Feynmandiagramme

für jede externe Photonlinie multipliziere
mit $\sqrt{Z_3}$

IV. 3. Regularisierung (dimensional regularisation)

Nachdem wir mit der Elektronen selbstenergie und der Vakuum polarisation zwei wichtige Beispiele von loop-Diagrammen kennengelernt haben wollen wir jetzt ein allgemeines Verfahren zur Regularisierung kennenlernen.

Struktur von 1-loop Integralen

$$I = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{N}{A_1 A_2 \cdots A_n}$$

A_i - Nenner der Propagatoren $\frac{k^2 + i\epsilon}{m^2 - p^2 + i\epsilon}$

N - Polynom in k^μ

(i) Alle Integrale vom Typ I können auf eine Standardform gebracht werden

Das Hauptproblem sind die Nenner

$$\frac{1}{A_1 A_2} = \int_0^1 dz \frac{1}{[A_1 z + A_2 (1-z)]^2} = \int_0^1 dz \frac{1}{[D(z)]^2}$$

$$D(z) = A_1 z + A_2 (1-z)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{A_1 A_2 A_3} &= 2 \int_0^1 dz_1 \int_0^{1-z_1} dz_2 \frac{1}{[A_1 z_1 + A_2 z_2 + A_3 (1-z_1-z_2)]^3} \\ &= 2 \int_0^1 dz_1 \int_0^{1-z_1} dz_2 \frac{1}{[D(z_1, z_2)]^3} \end{aligned}$$

$$D(z_1, z_2) = A_1 z_1 + A_2 z_2 + A_3 (1-z_1-z_2)$$

Da A_1, A_2, A_3 Nenner von Feynmanpropagatoren sind
hat D die Form ($A_i = a_i^2 + b_i \cdot k - k^2 \Rightarrow$ Koeffizient von $-k^2$ ist 1)

$$D = B^2 + 2k \cdot Q - k^2$$

k interne
4-Impuls

Variablentransformation $k = k' + Q$

$$\Rightarrow D = B^2 + Q^2 - k'^2 = C^2 - k'^2$$

Das führt zur Standardform der loop-Integrale

Bis auf Integrale über die Feynman Parameter $z_1, z_2, \dots$, die endliche Integrale sind, hat man zu bestimmen

$$(*) \quad \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{N}{(C^2 - k^2 - i\varepsilon)^n} \quad \text{Standardform von loop-Integralen}$$

(ii) dimensional regularization

Wenn $n > 2$ ist das Standard loop-Integral (*) konvergent; Für $n \leq 2$ ist es divergent. Wenn wir in $d < 2n$ Dimensionen wären, ist das Integral konvergent. $d \rightarrow 4$ produziert die Singularität wieder aber auf eine Weise die eine einfache Abspaltung erlaubt

für $d < 2n$ gilt

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{(C^2 - k^2 - i\varepsilon)^n} = \frac{i}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma(n - \frac{d}{2})}{\Gamma(n)} \left(\frac{1}{C^2} \right)^{n - \frac{d}{2}}$$

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{k^\mu k^\nu}{(C^2 - k^2 - i\varepsilon)^n} = - \frac{i g^{\mu\nu}}{2(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma(n - 1 - \frac{d}{2})}{\Gamma(n)} \left(\frac{1}{C^2} \right)^{n - 1 - \frac{d}{2}}$$

Bew.: ohne

Hierbei ist

$$\begin{aligned}\Gamma(\alpha) &= (\alpha-1) \Gamma(\alpha-1) \\ \Gamma(1) &= 1\end{aligned}$$

die Gamma-Funktion. Für $\alpha = n$ $\Gamma(n) = (n-1)!$

$$|\Gamma(0)| = |\Gamma(-1)| = |\Gamma(-2)| = \dots = \infty$$

aber für nicht-ganzzahlige Werte von α ist $\Gamma(\alpha)$ wohl definiert

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} dt \, t^{\alpha-1} e^{-t}$$

Jetzt: betrachten Integrale als Funktion des kontinuierlichen Parameters d und lassen am Ende $d \rightarrow 4$

Regularisierung der Vakuum polarisation

Wir haben in Abschnitt V.2 gesehen, daß die Vakuum polarisation gegeben ist durch

$$\Pi^{\mu\nu}(q) = -ie^2 \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{\text{Tr} \{ \gamma^\mu (m + \not{p}) \gamma^\nu (m + \not{p} - \not{q}) \}}{(m^2 - p^2 - i\epsilon)(m^2 - (p-q)^2 - i\epsilon)}$$

Nach den Regeln für die Spur eines Produktes von γ -

Nahem folgt

$$\Pi^{\mu\nu}(q) = -4ie^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} N^{\mu\nu}$$

$$N^{\mu\nu} = \frac{[m^2 g^{\mu\nu} + 2p^\mu p^\nu - p^\mu q^\nu - q^\mu p^\nu - g^{\mu\nu} p \cdot (p-q)]}{(m^2 - p^2 - i\varepsilon)(m^2 - (p-q)^2 - i\varepsilon)}$$

• dimensional regularization $\frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \rightarrow \frac{d^d p}{(2\pi)^d}$

+ Erzeugen der Standardform

$$\frac{1}{(m^2 - p^2)(m^2 - (p-q)^2)} = \int_0^1 dx \frac{1}{[(m^2 - p^2)(1-x) + (m^2 - (p-q)^2)x]^2}$$

$$\Rightarrow \Pi_d^{\mu\nu}(q) = -4ie^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{N^{\mu\nu}}{[m^2 - p^2 + 2p \cdot qx - q^2 x - i\varepsilon]^2}$$

setzen $p = k + qx$

$$\Pi_d^{\mu\nu}(q) = -4ie^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{\tilde{N}^{\mu\nu}}{[m^2 - k^2 - q^2 x(1-x) - i\varepsilon]^2}$$

wobei

$$\tilde{N}^{\mu\nu} = m^2 g^{\mu\nu} + 2k^\mu k^\nu + (q^\mu k^\nu + k^\mu q^\nu)(2x-1) - 2q^\mu q^\nu x(1-x) - g^{\mu\nu}(k+qx) \cdot (k-q(1-x))$$

Terme mit ungeraden Potenzen von k^μ verschwinden, da über einen symmetrischen Bereich integriert wird. Außerdem kann der denselben Grund im Integral

$$k^\mu k^\nu \rightarrow g^{\mu\nu} k^2/d$$

gesehen werden ($k^\mu k^\nu = 0$ falls $\mu \neq \nu$).

$$\Rightarrow \tilde{N}^{\mu\nu} \rightarrow g^{\mu\nu} \left[m^2 + \left(\frac{2}{d} - 1 \right) k^2 + q^2 x(1-x) \right] - 2q^\mu q^\nu x(1-x)$$

Jetzt kann die $d^d k$ Integration ausgeführt werden. Dies liefert

$$\Pi_d^{\mu\nu}(q) = \frac{4e^2}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma(2-d/2)}{\Gamma(2)} \int_0^1 dx \frac{1}{(m^2 - q^2 x(1-x))^{2-d/2}}$$

$$\times \left[g^{\mu\nu} (m^2 - q^2 x(1-x)) \left(1 - \frac{d}{2} \left(\frac{2}{d} - 1 \right) \frac{\Gamma(1-d/2)}{\Gamma(2-d/2)} \right) + (g^{\mu\nu} q^2 - q^\mu q^\nu) 2x(1-x) \right]$$

$= 0$!

$$\text{Wir sehen daß } 1 - \frac{d}{2} \left(\frac{2}{d} - 1 \right) \frac{\Gamma(1-d/2)}{\Gamma(2-d/2)} = 1 - \frac{(1-d/2) \Gamma(1-d/2)}{\Gamma(2-d/2)} = 0$$

d.h. der erste Term verschwindet. Das ist eine Stärke der dimensional regularization! Hätten wir von Anfang an $d=4$ gewählt wäre keiner der Ausdrücke definiert!

$$\Rightarrow \boxed{\Pi_d^{\mu\nu}(q^2) = (g^{\mu\nu} q^2 - q^\mu q^\nu) \Pi_d(q^2)}$$

wie bereits in IV.2 erwähnt. Für $\Pi_d(q^2)$ erhält man

$$\Pi_d(q^2) = \frac{\alpha}{\pi} \frac{\Gamma(3-d/2)}{(2-d/2)(4\pi)^{d/2-2}} \int_0^1 dx \frac{2x(1-x)}{(m^2 - q^2 x(1-x))^{2-d/2}}$$

Dieser Ausdruck ist für jeden Wert $d < 4$ wohl definiert, d.h. jetzt können wir den Grenzübergang $d \rightarrow 4$ ausführen.

$$\boxed{\Pi_d(q^2) = \Pi_d(0) + \bar{\Pi}_d(q^2)}$$

↑
divergent
für $d \rightarrow 4$

↑
endlich

$$\boxed{\Pi_d(0) = \frac{\alpha}{\pi} \frac{2\Gamma(1+\varepsilon/2)}{\varepsilon(4\pi)^{-\varepsilon/2}} \int_0^1 dx \frac{2x(1-x)}{m\varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \infty}$$

wobei $\varepsilon = 4-d$

$$\bar{\Pi}_d(q^2) = \frac{\alpha}{\pi} \frac{4\Gamma(1+\varepsilon/2)}{\varepsilon(4\pi)^{-\varepsilon/2}} \int_0^1 dx \frac{x(1-x)}{[m^2 - q^2 x(1-x)]^{\varepsilon/2}}$$

$$\cdot \left[\frac{1}{[m^2 - q^2 x(1-x)]^{\varepsilon/2}} \frac{1}{m\varepsilon} \right]$$

Mit

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} A^\varepsilon = 1 + \varepsilon \log A + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

$\Rightarrow$
 $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\bar{\pi}(q^2) = - \frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dx \, x(1-x) \log \left[1 - \frac{q^2}{m^2} x(1-x) \right]$$

Für $|\vec{q}|^2 \ll m^2$

$$\bar{\pi}(q^2) \rightarrow \frac{\alpha}{15\pi m^2} q^2$$

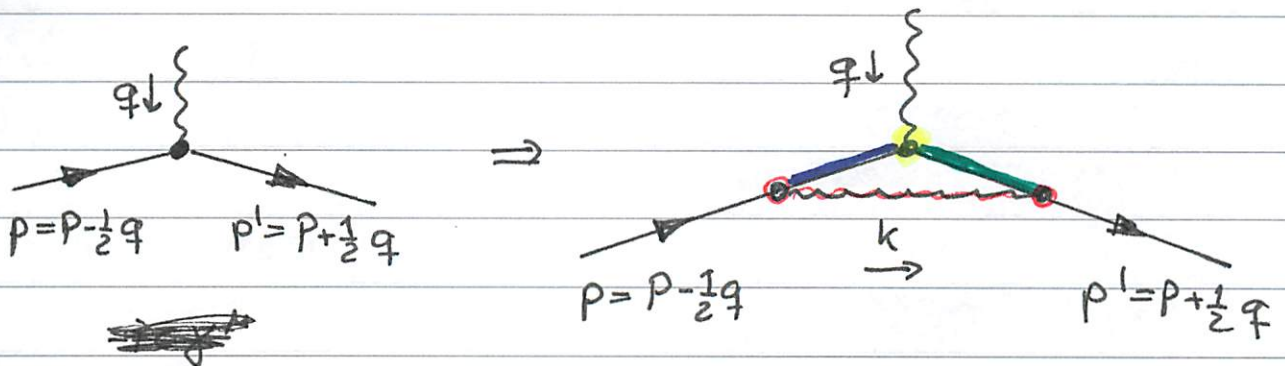
Der Term $\bar{\pi}(q^2)$ liefert einen weiteren Beitrag zur Lambshift: Nach Absorption von Z_3 in e.

$$iD^{\mu\nu}(q) \rightarrow iD'^{\mu\nu}(q) = \frac{ig^{\mu\nu}}{-q^2 - i\varepsilon} \frac{1}{1 + \bar{\pi}(q^2)}$$

$$\Delta E \approx -27 \text{ MHz}$$

Beitrag zur
Lambshift
durch
Vakuumpolarisation

V.4 Vertex Korrektur und anomales magnet. Moment



$$-e \bar{u}(\vec{p}') \gamma^\mu u(\vec{p}) \Rightarrow -e \bar{u}(\vec{p}') \mathcal{L}^\mu(P, q) u(\vec{p})$$

$$P = \frac{1}{2} (p + p')$$

mittlerer k -Impuls

$$q = p' - p$$

k -Impulsübertrag

$$\mathcal{L}^\mu(P, q) = ie^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\gamma^\nu \not{m} \not{p}' - \not{k} \gamma^\mu \not{m} \not{p} - \not{k} \gamma_\nu}{[m^2 - (p' - k)^2 - i\epsilon][m^2 - (p - k)^2 - i\epsilon][\lambda^2 - k^2 - i\epsilon]}$$

λ^2 fiktive Masse des Photons, wird später 0 gesetzt

• Erzeugung der Normalform

$$A_1 = m^2 - (p' - k)^2 - i\epsilon = 2p' \cdot k - k^2 - i\epsilon$$

($m^2 = p'^2$ für auslaufenden freien Diracspinor)

$$A_2 = m^2 - (p - k)^2 - i\epsilon = 2p \cdot k - k^2 - i\epsilon$$

$$A_3 = \lambda^2 - k^2 - i\epsilon$$

$$\frac{1}{A_1 A_2 A_3} = 2 \int_0^1 dz_1 \int_0^{1-z_1} dz_2 \frac{1}{\underbrace{[A_1 z_1 + A_2 z_2 + A_3 (1-z_1-z_2)]}_{=D}}^3$$

$$D = 2(z_1 p' + z_2 p) \cdot k + \lambda^2 (1-z_1-z_2) - k^2 - i\varepsilon$$

Verschiebung der Integrationsvariablen $k \rightarrow k'$

$$k = k' + z_1 p' + z_2 p$$

führt zur Beseitigung des gemischten Terms linear in k :

$$D = (z_1 + z_2)^2 m^2 - z_1 z_2 q^2 + \lambda^2 (1-z_1-z_2) - k'^2 - i\varepsilon$$

wobei wieder $p^2 = m^2 = p'^2$ angewendet wurde. Analog muß auch der Zähler in $\Lambda^M(p, q)$ behandelt werden

$$N^M = \cancel{\gamma^\nu} (m + \cancel{p}'(1-z_1) - z_2 \cancel{p} - \cancel{k}') \cancel{\gamma^\mu} (m + \cancel{p}(1-z_2) - \cancel{p}' z_1 - \cancel{k}') \cdot \cancel{\gamma_\nu}$$

$$= \gamma^\nu (m + p'(1-z_1) - z_2 p) \gamma^\mu (m + p(1-z_2) - z_1 p') \gamma_\nu \\ + \cancel{\gamma^\nu} \cancel{k}' \cancel{\gamma^\mu} \cancel{k}' \cancel{\gamma_\nu}$$

Lineare Terme in k' wurden vernachlässigt, da sie bei Integration $d^4 k'$ verschwinden.

nach weiteren verschiedenen Vereinfachungen, die u. A. benutzen

$$\cdot \quad \not{x}^M \not{x} \not{x}_\mu = -2 \not{x} \quad \not{x}^M \not{x} \not{x}_\mu = 4 a \cdot b$$

$$\not{x}^M \not{x} \not{x} \not{x}_\mu = -2 \not{x} \not{x} \not{x}$$

$$\cdot \quad (z_2 - z_1)^1 \text{ Terme verschwinden nach Integration}$$

$$\cdot \quad \not{x}^1 \text{ Terme verschwinden nach Anwendung auf Spinore } \bar{u}(\vec{p}') \text{ bzw } u(\vec{p})$$

$$\cdot \quad \text{im Integral } \int d^4k \quad k^\mu k^\nu \rightarrow g^{\mu\nu} k^2/4$$

$\Rightarrow \dots \Rightarrow$

$$N^M = \not{x}^M \left[-2m^2 (1 + (1 - z_1 - z_2)^2) - 2 \not{x}^2 (1 - z_2)(1 - z_1) + k'^2 \right] \\ + 4m(1 - z_1 - z_2)(p' + p)^M + 4m(1 - z_1 - z_2) \left(1 - \frac{1}{2}(z_1 + z_2) \right) i \not{\partial}^{\mu\nu} \not{q}_\nu$$

wobei

$$\not{\partial}^{\mu\nu} \equiv \frac{i}{2} [\not{x}^\mu, \not{x}^\nu] \quad (\text{siehe Dirac Theorie})$$

$$\text{d.h.} \quad \not{\partial}^{\mu\nu} \not{q}_\nu = \frac{i}{2} [\not{x}^\mu, \not{x}]$$

In einer Übungsaufgabe soll gezeigt werden, dass

$$\bar{u}(\vec{p}') \frac{(p' + p)^M}{2m} u(\vec{p}) = \bar{u}(\vec{p}') \not{x}^M u(\vec{p}) - \bar{u}(\vec{p}') \frac{i \not{\partial}^{\mu\nu} \not{q}_\nu}{2m} u(\vec{p})$$

Damit wird

$$N^{\mu\nu} = \gamma^{\mu} \left\{ -2m^2 [1 - 4(1-z_1-z_2) + (1-z_1-z_2)^2] \right. \\ \left. - 2q^2 (1-z_1)(1-z_2) + k'^2 \right\} \\ - i 2m \sigma^{\mu\nu} q_{\nu} (1-z_1-z_2)(z_1+z_2)$$

⇒ Korrektur des γ^{μ} Vertex

neuer Term

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{L}^{\mu}(P, q) = \gamma^{\mu} F_1(q^2) + \frac{i \sigma^{\mu\nu} q_{\nu}}{2m} F_2(q^2)}$$

Skalare Funktionen von q^2

Vertexkorrektur:

- Modifikation der Vorfaktor von γ^{μ}
Kopplung ehm. Feld an Dirac-Shorn
- neuer Kopplungsterm $i \sigma^{\mu\nu} q_{\nu}$
anomaler oder Pauli-Shorn

$$F_1(q^2) = 2ie^2 \int \frac{d^4 k'}{(2\pi)^4} \int_0^1 dz_1 \int_0^{1-z_1} dz_2 \frac{N_1}{[D(k'^2)]^3}$$

$$F_2(q^2) = -2ie^2 \int \frac{d^4 k'}{(2\pi)^4} \int_0^1 dz_1 \int_0^{1-z_1} dz_2 \frac{4m^2(z_1+z_2)(1-z_1-z_2)}{[D(k'^2)]^3}$$

mit

$$N_1 = k'^2 - 2q^2(1-z_1)(1-z_2) - 2m^2 [1 - 4(1-z_1-z_2) + (1-z_1-z_2)^2]$$

Wir sehen, daß wir einen regulären und einen singulären Beitrag bekommen:

$$F_2 \sim \int d^4 k' \frac{1}{k'^6} < \infty \quad \text{regulär!}$$

$$F_1 \sim \int d^4 k' \frac{k'^2}{k'^6} \sim \int dk' \frac{1}{k'} \rightarrow \infty \quad \text{singulär!}$$

• Renormierung der divergenten Terme

$$\underline{L}^M(P, q) = \underbrace{\left[F_1(q^2) - F_1(0) \right] \gamma^M + F_2(q^2) \frac{i \sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m}}_{\text{regulär}}$$

$$+ \underbrace{F_1(0) \gamma^M}_{\text{singulär}}$$

Weitere Renormierungskonstante

$$F_1(0) = \frac{1}{Z_1} - 1$$

auch diesen Beitrag können wir schlußendlich in die Definition der physikalischen Ladung stecken

→ siehe Ladungsrenormierung (nächster Abschnitt)

- anomalies magnetisches Moment des Elektrons

Der endliche Beitrag zur Vertexkorrektur hat eine große physikalische Bedeutung und soll daher noch einmal separat diskutiert werden:

Dirac Gleichung in externen elen. Feld ($q^2=0$!)

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - e A_\mu \gamma^\mu - m) \psi = 0$$

Mit dem regulären Anteil der Vertexkorrektur im Fourierraum

$$e\gamma^\mu A_\mu \rightarrow e\gamma^\mu A_\mu + eF_2(0) \frac{i\sigma^{\mu\nu} q_\nu A_\mu}{2m}$$

Im Konfigurationsraum bedeutet dies

$$\begin{aligned} e\gamma^\mu A_\mu &\rightarrow e\gamma^\mu A_\mu + eF_2(0) \frac{\sigma^{\mu\nu} A_{\mu,\nu}}{2m} \\ &= e\gamma^\mu A_\mu + eF_2(0) \frac{\sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu}}{4m} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (i\gamma^\mu \partial_\mu - e\gamma^\mu A_\mu - eF_2(0) \frac{\sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu}}{4m} - m) \psi = 0$$

Der Korrekturterm führt zu einer Modifikation des magnetischen Moments des Elektrons (Ü.A.)

gyromagnetische Faktor g

$$\mu_{\text{mag}} = g \frac{e}{2m} s$$

Dirac	$g = 2$
-------	---------

QED	$g = 2 + \kappa$
-----	------------------

$\kappa = F_2(0) + \text{höhere$ Beiträge
--

$$F_2(0) = -2ie^2 \int_0^1 dz_1 \int_0^{1-z_1} dz_2 *$$

$$* \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{4m^2(z_1+z_2)(1-z_1-z_2)}{\underbrace{[m^2(z_1+z_2)^2 + \lambda^2(1-z_1-z_2) - k^2 - i\epsilon]}_{=B^2}}^3$$

Mit dem im letzten Abschnitt abgeleiteten Integralformel findet man

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(B^2 - k^2 - i\epsilon)^3} = \frac{i}{32\pi^2 B^2}$$

Damit

$$F_2(0) = \frac{2e^2}{32\pi^2} 4m^2 \int_0^1 dz_1 \int_0^{1-z_1} dz_2 \frac{(z_1+z_2)(1-z_1-z_2)}{m^2(z_1+z_2)^2 + \lambda^2(1-z_1-z_2)}$$

Singularität bei $z_1+z_2=0$ (nachdem $\lambda \rightarrow 0$) ist Punkt im 2-dim. Integrationsbereich und daher integrierbar.

mit $q = z_1 + z_2$ $h = \frac{1}{2q} (z_1 - z_2)$

$$\int_0^1 dz_1 \int_0^{1-z_1} dz_2 \rightarrow \int_0^1 dq \int_{-1/2}^{1/2} dh$$

$$\Rightarrow F_2(0) = \frac{e^2}{4\pi^2} \int_0^1 dq \int_{-1/2}^{1/2} dh (1-q) = \frac{\alpha}{\pi} \int_0^1 dq (1-q)$$

$$= \frac{\alpha}{2\pi} \quad \text{Schwinger 1948}$$

D.h. in niedrigster Ordnung von α findet man für das magnetische Moment des Elektrons

$$g - 2 = \frac{\alpha}{2\pi} + \mathcal{O}(\alpha^2)$$

QED Resultat
zum anomalen
magnetischen
Moment

Theorie bis α^4 :

$$g-2 = \frac{\alpha}{2\pi} - 0.328478966 \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 + 1.17671(42) \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^3 - 1.434(136) \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^4$$

$$(g-2)_{th} \simeq 0.001\,159\,652\,140(28)$$

Experiment:

$$(g-2)_{ex} = 0.001\,159\,652\,1884(43)$$

$$\frac{\Delta x}{x} \sim 10^{-12}$$



V.5 Massen- und Ladungsrenormierung

(A) Massenrenormierung

Bei der Diskussion der Selbstenergie des Fermions (Elektrons) haben wir gesehen, daß die stets präsente Wechselwirkung mit dem quantisierten em. Feld zu einer Renormierung der Masse führt

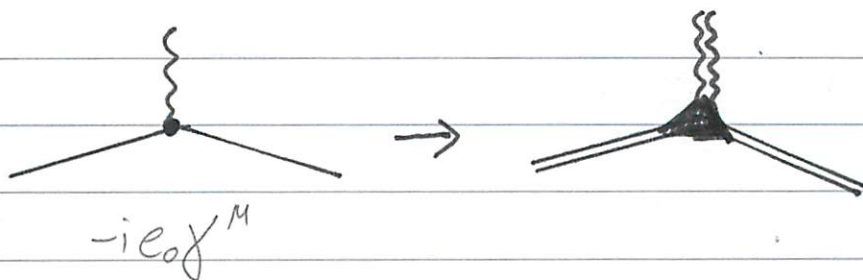
$$m \rightarrow m + \Sigma = \bar{m}$$

Da es unmöglich ist die nackte Masse m zu beobachten werden wir im Folgenden die Masse $\bar{m}$ als die echte phys. Masse des Fermions betrachten.

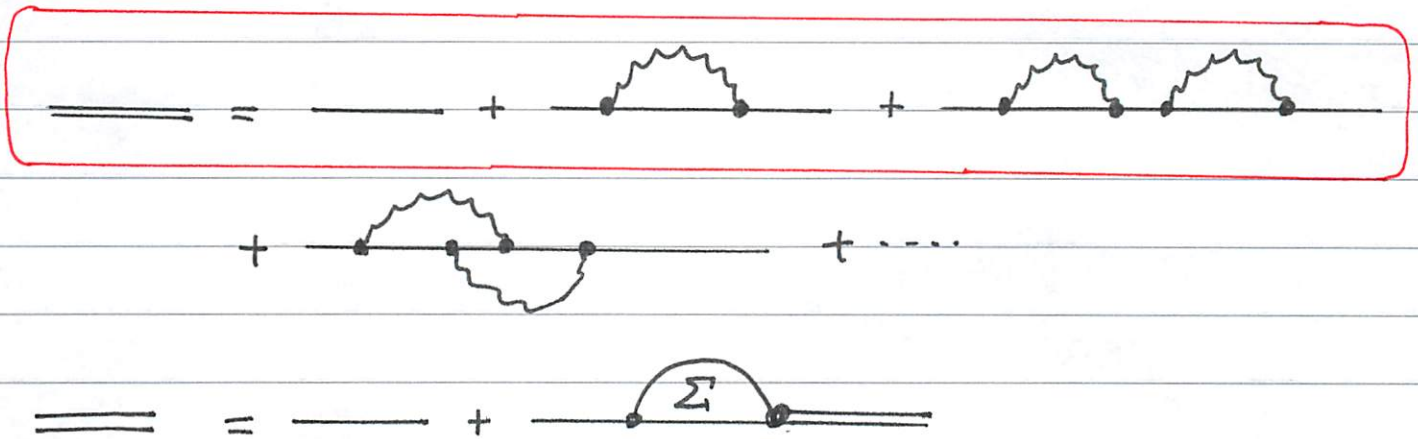
Vereinfachung der Notation $\bar{m} \rightarrow m$

(B) Ladungsrenormierung

Diagramme die zum vollen Elektron-Photon Vertex beitragen



wobei der volle Elektronenpropagator gegeben ist durch



In V.1 hatten wir alle Diagramme der ersten Zeile aufsummiert. Diese partielle Aufsummation der Graphen liefert die Näherung für die Elektronenselfenergie

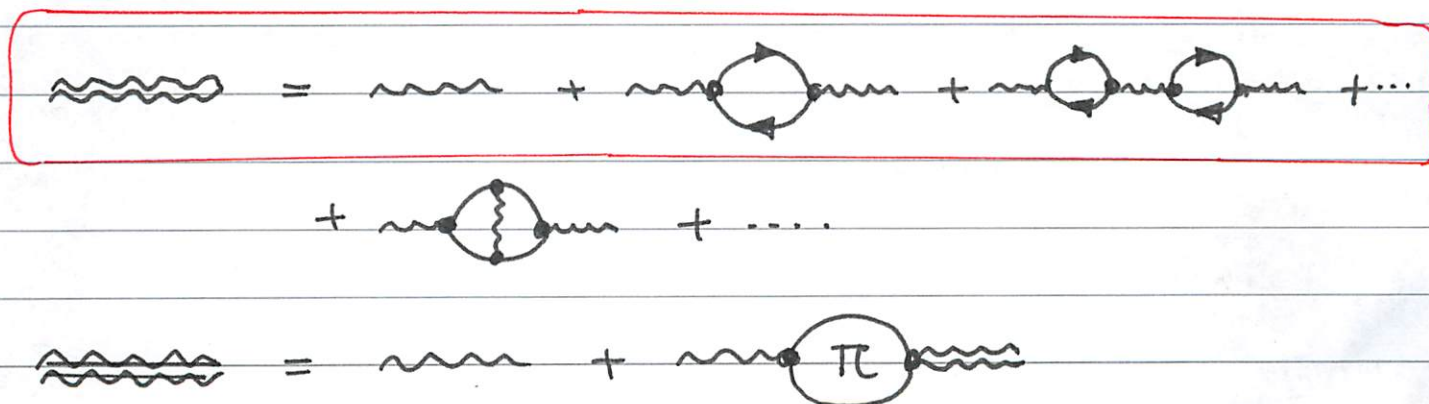


und führe auf (wobei $\bar{m} \rightarrow m$)

$$iS(p) \rightarrow iS'(p) = \frac{-iZ_2}{m - \not{p} + Z_2 \Sigma_e(p) - i\epsilon}$$

mit $\Sigma_e(p) \rightarrow 0$ für $p^2 \rightarrow m^2$.

Außerdem ist der volle Photonpropagator



In V.2 hatten wir alle Diagramme der ersten Zeile aufsummiert. Diese partielle Aufsummation der Graphen lieferte die Näherung für die Vakuumpolarisierung

$$\text{Diagram with } \pi \text{ in a circle} \approx \text{Diagram with two vertices connected by two lines}$$

und führte auf

$$iD^{\mu\nu}(q) \rightarrow iD'^{\mu\nu}(q) = \frac{ig^{\mu\nu}}{-q^2 - i\varepsilon} \frac{Z_3}{1 + Z_3 \bar{\Pi}(q^2)}$$

mit $\bar{\Pi}(q^2) \rightarrow 0$ für $q^2 \rightarrow 0$.

Schließlich ist der volle Vertexoperator gegeben durch

$$\text{Diagram 1} = \text{Diagram 2} + \text{Diagram 3} + \text{Diagram 4} + \text{Diagram 5} + \dots$$

In V.4 hatten wir die ersten beiden Terme betrachtet und gefunden

$$\begin{aligned} \gamma^\mu &\rightarrow \Gamma^\mu(P, q) = \gamma^\mu + \Lambda^\mu(P, q) \\ &= [F_1(q^2) - F_1(0)] \gamma^\mu + F_2(q^2) \frac{ig^{\mu\nu} q_\nu}{2m} + \frac{1}{Z_1} \gamma^\mu \end{aligned}$$

$\rightarrow 0$ für $q^2 \rightarrow 0$

Berücksichtigen wir alle Diagramme die in niedrigster Ordnung der Störungstheorie in (i) der Selbstenergie des Elektrons, (ii) der Vakuumpolarisation und (iii) der Vertexkorrektur zum vollen Vertex beitragen, sehen wir daß die divergenten Renormierungsamplituden Z_1, Z_2, Z_3 in der elektrischen Ladung absorbiert werden können

$$e_0 \longrightarrow e_0 \sqrt{Z_3} \frac{Z_2}{Z_1} = e$$

Ladungsrenormierung

Man kann zeigen, daß die Amplituden Z_1, Z_2, Z_3 in allen Ordnungen der Störungstheorie durch diese Renormierung der Ladung absorbiert werden können.

Dazu sei bemerkt, daß gilt:

$$\Sigma = \text{diagramm}$$

$$\Pi = \text{diagramm}$$

IV.6 Die Ward Identität

Die im letzten Abschnitt gefundene Renormierung der Ladung

$$e_0 \rightarrow e = e_0 \sqrt{Z_3} \frac{Z_2}{Z_1}$$

wirft die Frage auf ob die renormierte Ladung e eine universelle Größe ist oder von den speziellen Eigenschaften des Fermions wie seiner Masse abhängt? In Z_1 und Z_2 gehen Fermionenpropagatoren ein, so daß dies zunächst naheliegt. Dies wollen wir jetzt näher untersuchen.

Dazu beweisen wir zunächst folgende Relation

$$\boxed{\mathcal{L}^\mu(p, 0) = - \frac{\partial}{\partial p_\mu} \Sigma(p)}$$

Ward-Takahashi Identität

$$\mathcal{L}^\mu(p, q) = ie_0^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \gamma^\nu \frac{1}{m - \not{p}' + \not{k} - i\varepsilon} \gamma^\mu \frac{1}{m - \not{p} + \not{k} - i\varepsilon} \\ \cdot i \cdot \gamma_\nu \frac{1}{\lambda^2 - k^2 - i\varepsilon}$$

sowie

$$\Sigma(p) = -ie_0^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \gamma^\nu \frac{1}{m - \not{p}' + \not{k} - i\varepsilon} \gamma_\nu \frac{1}{\lambda^2 - k^2 - i\varepsilon}$$

(später $\lambda^2 \rightarrow 0$)

ann gilt

$$\frac{1}{m-p'+k} - \frac{1}{m-\cancel{p}+k} = \frac{1}{(m-p'+k)} (p'-p) \frac{1}{(m-\cancel{p}+k)}$$

$\Rightarrow$

$$g_\mu \mathcal{L}^M\left(\frac{p'+p}{2}, q\right) = \Sigma(p) - \Sigma(p')$$

mit $p' \rightarrow p$: $p \rightarrow p$, $q \rightarrow 0$ und

$$\Sigma(p') \simeq \Sigma(p) + \frac{\partial \Sigma(p)}{\partial p_\mu} \underbrace{(p'-p)_\mu}_{g_\mu}$$

$\Rightarrow$

$$\mathcal{L}^M(p, 0) = -\frac{\partial}{\partial p_\mu} \Sigma(p) \quad \square$$

Bem: Man kann zeigen, daß die Ward-Identität in allen Ordnungen von ϵ_0 gilt

Die Ward Identität hat eine wichtige Folgerung:
Für $p^2 \rightarrow m^2$ gilt

$$\mathcal{L}^M(p, 0) = g^M \left(\frac{1}{z_1} - 1 \right)$$

$$\Sigma(p) = \delta m + (m-\cancel{p}) \left(\frac{1}{z_2} - 1 \right)$$

aus $\mathcal{L}^M(p, 0) = -\frac{\partial}{\partial p_\mu} \Sigma(p)$ folgt

$$\boxed{z_1 = z_2}$$

Damit gilt für die Ladungsrenormierung

$$e = \sqrt{Z_3} e_0$$

► Die renormierte elektrische Ladung ist universell und hängt nicht von der Fermionenmasse ab!

IV.7 Zur Renormierbarkeit von Quantenfeldtheorien

Divergenzen in einer QFT mit Feynmanregeln entstehen durch die Integrationen d^4k in Loop-Diagrammen.

Zur Vereinfachung: Theorien ohne Ableitungen im Wechselwirkungs-Lagrangian (wie QED)

Betrachten ein typisches Diagramm:

- # innere loops: l
- # innere Spin-0 Bosonen Linien: n_B
- # innere Fermionen Linien: n_F

Globaler Divergenzgrad eines Diagramms

$D =$ Potenzen von k im Zähler
– Potenzen von k im Nenner

$$D = 4d - 2n_B - n_F$$

falls $D > 0$	Diagramm divergiert
$D = 0$	Diagramm nur logarithmisch divergent
$D < 0$	Diagramm nur konvergent

Genauer: Ein gegebenes Diagramm ist konvergent wenn alle Unterdigramme nur konvergent sind

Frage: Kann der Divergenzgrad aller Diagramme und Diagrammteile aus dem Wechselwirkungs-Lagrangian bestimmt werden?

Betrachten:

$$\mathcal{L}_I \sim (\bar{\psi} \theta \psi)^{F/2} \phi^B$$

F – Anzahl der Fermionenfelder (gerade) pro Vertex
 B – Anzahl der Bosonenfelder pro Vertex

N_B Anzahl externer Bosonenlinien in einem Diagramm
 N_F Anzahl externer Fermionenlinien -11-

n Ordnung der Störungstheorie

da jeder Propagator an 2 Vertices koppelt gilt

$$N_B + 2n_B = nB$$

$$N_F + 2n_F = nF$$

außerdem: Anzahl l von loops = Anzahl der
 4-Impulse die nicht durch externe Linien
 fixiert sind

$$l = N_B + N_F - n + 1$$

$$\Rightarrow \boxed{D = nI + d - \frac{1}{2}(d-2)N_B - \frac{1}{2}(d-1)N_F}$$

Ordnung
 d. Störungstheorie

hängt vom betrachteten
 Diagramm ab

Divergenzindex

$$\boxed{I = \frac{1}{2}(d-2)B + \frac{1}{2}(d-1)F - d}$$

$$|d=4|$$

$$I = B + \frac{3}{2} F - 4$$

$$D = nI + 4 - N_B - \frac{3}{2} N_F$$

$$I > 0$$

ab einer bestimmten Ordnung der Störungstheorie sind alle Diagramme divergent

nicht renormierbare Theorie

$$I = 0$$

D ist unabhängig von n

und in $d=4$ ist $D < 0$ [?] $\frac{1}{2}$

falls $N_B + \frac{3}{2} N_F > 4$

$\Rightarrow$ nur kleine Anzahl elementarer Teildigramme führt zu divergenten Diagrammen in allen höheren Ordnungen der Störungstheorie

superfiziell renormierbare Theorie

Bspl: QED

divergente elementare Diagramme:

e -Selbstenergie $D = +1$

Vakuum pol. $D = +2$

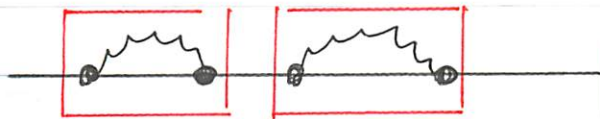
Vertexkorrektur $D = 0$

• $I < 0$

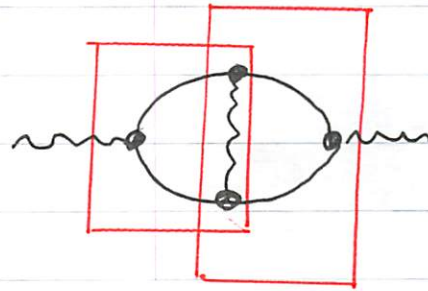
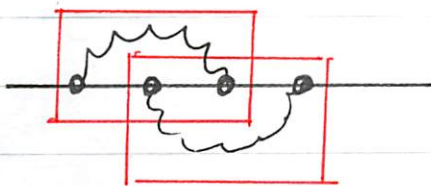
nur endliche Anzahl von
Teildiagrammen in endlicher
Anzahl von Diagrammen
divergent

Super - renormierbare Theorie

Zum Beweis der Renormierbarkeit einer superfizial/
renormierbaren Theorie muß man beachten, daß
Diagramme mit nicht überlappenden Divergenzen
wie



als auch Diagramme mit überlappenden
Divergenzen auftreten



Letztere bedürfen einer gesonderten Betrachtung

Im Falle der QED können überlappende Divergenzen
auf nicht-überlappende Divergenzen zurückgeführt
werden mit Hilfe der Ward - Takahashi Identität

$\Rightarrow$ Beweis der Renormierbarkeit der QED