

IV. QED mit Wechselwirkung: Störungstheorie

IV.1. Wick Theorem

Im folgenden wird unsere Aufgabe darin bestehen
Streuamplitudelemente bzw. Übergangswahrscheinlich-
keiten störungstheoretisch, d.h. durch Entwicklung
nach dem Wechselwirkungshamiltonian zu
berechnen

$$\begin{aligned}\langle \beta | \hat{U}_I(\infty, -\infty) | \alpha \rangle &= \langle \beta | T \exp \left\{ -i \int_{-\infty}^{\infty} dz \hat{H}_I(z) \right\} | \alpha \rangle \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dz_1 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dz_n (-i)^n \langle \beta | T \hat{H}_I(z_1) \cdots \hat{H}_I(z_n) | \alpha \rangle\end{aligned}$$

D.h. wir müssen Größen der Art

$$\langle \beta | T \hat{H}_I(z_1) \cdots \hat{H}_I(z_n) | \alpha \rangle$$

auswerten. Für Streuprozesse um die es nahezu
ausschließlich gehen wird sind $|\alpha\rangle$ und $|\beta\rangle$
oft einlaufende (auslaufende) ebene Teilchenwellen,
d.h. haben die Struktur

$$|\alpha\rangle = a_{\vec{q}, 2}^{\dagger} |0\rangle \quad \text{etc.}$$

Daher ist es hinreichend zu überlegen wie
Vakuumerwartungswerte der Art

$$\langle 0 | T \hat{a}_{\vec{q}_1}(\infty) \hat{H}_I(\tau_1) \dots \hat{H}_I(\tau_n) \hat{a}_{\vec{q}_2}^\dagger(-\infty) | 0 \rangle$$

effizient berechnet werden können.

typischerweise $\hat{H}_I \sim \hat{\phi}(x) \hat{\psi}^\dagger(x)$ etc.

$$\Rightarrow \langle 0 | T \hat{a}(\tau_1) \hat{a}(\tau_2) \hat{c}^\dagger(\tau_2) \dots | 0 \rangle = ?$$

$\Rightarrow$ Wick Theorem

Def: Zeitgeordnetes Produkt

$$T(\hat{\phi}(x) \hat{\phi}^{(+)}(y)) \equiv \begin{cases} \hat{\phi}(x) \hat{\phi}^{(+)}(y) & x_0 > y_0 \\ \eta \hat{\phi}^{(+)}(y) \hat{\phi}(x) & x_0 < y_0 \end{cases}$$

$$\eta = +1 \quad \text{Bose}$$

$$\eta = -1 \quad \text{Fermi}$$

Def: zeitgeordnetes Produkt mehrerer Operatoren

$$T(\hat{A}(x) \hat{B}(y) \hat{C}(z)) = \begin{cases} \hat{A}(x) \hat{B}(y) \hat{C}(z) & x_0 > y_0 > z_0 \\ \eta \hat{A}(x) \hat{C}(z) \hat{B}(y) & x_0 > z_0 > y_0 \\ \eta' \hat{B}(y) \hat{A}(x) \hat{C}(z) & y_0 > x_0 > z_0 \\ \text{etc.} \end{cases}$$

$\eta, \eta' = (-1)^p$ p - Anzahl der Fermionen Operatoren
die vertauscht werden müssen um das zeitgeordnete
Produkt zu erhalten

Bspl:

$$: \hat{a} \hat{a}^+ \hat{a}^+ \hat{a} \hat{a} : = \hat{a}^{+2} \hat{a}^2$$

$$: \hat{c}_1 \hat{c}_1^+ \hat{c}_2^+ : = \hat{c}_1^+ \hat{c}_2^+ \hat{c}_1$$

$$= - \hat{c}_2^+ \hat{c}_1^+ \hat{c}_1$$

Def: Kontraktion zweier in Erzeugern
und Vernichtern linearer Operatoren

$$\overbrace{\hat{A}(x) \hat{B}(y)} \equiv \langle 0 | T \hat{A}(x) \hat{B}(y) | 0 \rangle$$

Sei

$$\hat{\phi}(x) = \hat{\phi}_{(-)}^{(+)} + \hat{\phi}_{(+)}^{(-)}(x)$$

enthält nur

Vernichter

Erzeuger

$$\hat{\phi}_{(+)}^{(-)}$$

positiv Frequenzanteil von $\hat{\phi}(x)$

$$\hat{\phi}_{(-)}^{(+)}$$

negativ - " - von $\hat{\phi}(x)$

dann gilt offensichtlich

$$\overbrace{\hat{\phi}_{(+)}^{(-)} \hat{\phi}_{(+)}^{(-)}} = \overbrace{\hat{\phi}_{(-)}^{(+)} \hat{\phi}_{(-)}^{(+)}} = 0$$

$$\overbrace{\hat{\phi}_{(\pm)} \hat{\psi}_{(\pm)}} = \overbrace{\hat{\phi}_{(\mp)} \hat{\psi}_{(\pm)}} = 0$$

Def: normalgeordnetes Produkt

$$:\hat{\phi}(x)\hat{\phi}^\dagger(y): \equiv \hat{\phi}(x)\hat{\phi}^\dagger(y) - \langle 0|\hat{\phi}(x)\hat{\phi}^\dagger(y)|0\rangle$$

Bose-Felder:

$$\begin{aligned} : \hat{a}\hat{a}^\dagger : &= \hat{a}\hat{a}^\dagger - \langle 0|\hat{a}\hat{a}^\dagger|0\rangle \\ &= \hat{a}^\dagger\hat{a} + 1 - 1 = \hat{a}^\dagger\hat{a} \end{aligned}$$

Fermi-Felder

$$\begin{aligned} : \hat{c}\hat{c}^\dagger : &= \hat{c}\hat{c}^\dagger - \langle 0|\hat{c}\hat{c}^\dagger|0\rangle \\ &= -\hat{c}^\dagger\hat{c} + 1 - 1 = -\hat{c}^\dagger\hat{c} \end{aligned}$$

D.h. Normalordnung entspricht tauschen von Erzeugern nach links und Vernichtern nach rechts mit negativem Vorzeichenfaktor bei Fermionen

Def: normalgeordnetes Produkt mehrerer zu Erzeugern und Vernichtern linearer Operatoren:

Tauschen aller Erzeuger nach links und aller Vernichter nach rechts mit Vorfaktor $(-1)^p$, wobei p die Anzahl der Vertauschungen von Fermi-Operatoren entspricht die benötigt werden um vom ursprünglichen Produkt zum normalgeordneten Produkt zu gelangen.

Wick-Theorem

Das zeitgeordnete (T) Produkt aus linearen Operatoren (linear in Erzeugern und Vernichtern) ist gleich der Summe aller normalgeordneten Produkte mit allen möglichen paarweisen Kontraktionen, einschließlich des Terms ohne Kontraktion. Dabei ergibt sich ein Vorfaktor ± 1 je nach Zahl der kommutierten fermionischen Operatoren

Bem: in der Vielteilchentheorie werden noch andere allgemeinere Formulierungen unter dem Namen Wick-Theorem geführt

$$\begin{aligned} \text{d.h.} \quad T(\phi_1 \cdots \phi_n) &= : \phi_1 \cdots \phi_n : \\ &+ \overbrace{:\phi_1 \phi_2 \phi_3 \cdots \phi_n:}^{\text{}} \pm \overbrace{:\phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4 \cdots \phi_n:}^{\text{}} \\ &\pm \cdots \\ &\pm \overbrace{:\phi_1 \phi_2 \phi_3 \phi_4 \phi_5 \cdots \phi_n:}^{\text{}} + \cdots \\ &\pm \cdots \end{aligned}$$

Bew.: • hier nur Beweisidee:

(i) man wähle bestimmte zeitliche Ordnung

(ii) man bringe benachbarte Operatoren mittels $\phi_1 \phi_2 = : \phi_1 \phi_2 : - \langle 0 | \phi_1 \phi_2 | 0 \rangle$

sukzessive in Normalordnung,
 wegen der vorab gewählten Zeitordnung
 ist $\langle 0 | \phi_1 \phi_2 | 0 \rangle = \langle 0 | T \phi_1 \phi_2 | 0 \rangle$
 $= \overline{\phi_1 \phi_2}$

eine wichtige Konsequenz ist

$$\begin{aligned}
 \langle 0 | T(\phi_1 \dots \phi_{2n+1}) | 0 \rangle &= 0 \\
 \langle 0 | T(\phi_1 \dots \phi_{2n}) | 0 \rangle &= \overline{\phi_1 \phi_2} \overline{\phi_3 \phi_4} \dots \overline{\phi_{2n-1} \phi_{2n}} \\
 &+ \eta \overline{\phi_1 \phi_3} \overline{\phi_2 \phi_4} \dots \overline{\phi_{2n-1} \phi_{2n}} + \dots
 \end{aligned}$$

d.h. der Vakuumerwartungswert eines T-Produktes
 aus $2n$ Operatoren lässt sich in eine Summe
 aus Produkten aus der Kontraktionen schreiben.

Für $2n$ Operatoren gibt es

$$\frac{(2n)!}{2^n n!} = (2n-1)(2n-3) \dots$$

Terme in der Summe.

$\Rightarrow$ alles lässt sich auf Kontraktionen

$$\overline{\phi(x) \phi(y)} \quad \text{reduzieren!}$$

IV.2 Kontraktionen und Propagatoren

Wir wollen nun sehen welche physikalische Bedeutung die nach Anwendung des Wick-Theorems entstehenden 2er Kontraktionen besitzen.

(A) elm. Feld in Coulombgleichung

Die fundamentalen Felder des Maxwellfeldes in Coulomb-Gleichung waren

$$\vec{A}_\perp(\vec{r}, t) \quad \vec{E}_\perp(\vec{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{A}_\perp(\vec{r}, t)$$

mit

$$[\vec{A}_\perp(\vec{r}, t), \vec{E}_\perp(\vec{r}', t)] = -i \overset{(\perp)}{\delta}_\perp^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}')$$

als fundamentale Vertauschungsregel. Die Euler-Lagrange Bewegungsgleichung für $\vec{A}_\perp(\vec{r}, t)$ in einem externen Strom $\vec{j}(\vec{r}, t)$ ist

$$\square \vec{A}_\perp(\vec{r}, t) = \vec{j}_\perp(\vec{r}, t) = \int d^3\vec{r}' \vec{j}(\vec{r}', t) \overset{(\perp)}{\delta}_\perp^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}')$$

Die Greensche Funktion dieser Gleichung lässt sich durch

$$\square D_c^{ke}(\vec{r}, t; \vec{r}', t') = -\delta_\perp^{ke}(\vec{r} - \vec{r}') \delta(t - t')$$

definieren

wir werden jetzt sehen, daß

$$D_c^{ke}(\vec{r}, t; \vec{r}', t') = -i \langle 0 | \hat{T} A_{\perp}^k(\vec{r}, t) A_{\perp}^e(\vec{r}', t') | 0 \rangle$$

gilt, wobei $\vec{A}_{\perp}$ das freie transversale Vektorpotential bedeutet

$$\partial_t \langle 0 | T A_{\perp}^k(\vec{r}, t) A_{\perp}^e(\vec{r}', t') | 0 \rangle =$$

$$\partial_t \left\{ \theta(t-t') \langle 0 | A_{\perp}^k(\vec{r}, t) A_{\perp}^e(\vec{r}', t') | 0 \rangle + \theta(t'-t) \langle 0 | A_{\perp}^e(\vec{r}', t') A_{\perp}^k(\vec{r}, t) | 0 \rangle \right\}$$

$$= \underbrace{\delta(t-t') \langle 0 | [A_{\perp}^k(\vec{r}, t), A_{\perp}^e(\vec{r}', t')] | 0 \rangle}_{=0}$$

$$+ \theta(t-t') \langle 0 | \partial_t A_{\perp}^k(\vec{r}, t) A_{\perp}^e(\vec{r}', t') | 0 \rangle + \theta(t'-t) \langle 0 | A_{\perp}^e(\vec{r}', t') \partial_t A_{\perp}^k(\vec{r}, t) | 0 \rangle$$

$$\partial_t^2 \langle 0 | T \dots | 0 \rangle =$$

$$= \delta(t-t') \langle 0 | [\partial_t A_{\perp}^k(\vec{r}, t), A_{\perp}^e(\vec{r}', t')] | 0 \rangle$$

$$+ \theta(t-t') \langle 0 | \partial_t^2 A_{\perp}^k A_{\perp}^e | 0 \rangle + \theta(t'-t) \langle 0 | A_{\perp}^e \partial_t^2 A_{\perp}^k | 0 \rangle$$

$$= -i \delta(t-t') \delta_{\perp}^{ek}(\vec{r}, \vec{r}')$$

$$+ \theta(t-t') \langle 0 | \Delta A_{\perp}^k A_{\perp}^e | 0 \rangle + \theta(t'-t) \langle 0 | A_{\perp}^e \Delta A_{\perp}^k | 0 \rangle$$

Dann folgt $(x \equiv (\vec{r}, t)) \quad (\delta_{\perp}^{ke} = \delta_{\perp}^{ek})$

$$\begin{aligned} \square_x \langle 0 | T \hat{A}_{\perp}^k(r, t) \hat{A}_{\perp}^e(r', t') | 0 \rangle &= \\ &= (\partial_t^2 - \Delta_{\vec{r}}) \langle 0 | T \hat{A}_{\perp}^k(\vec{r}, t) \hat{A}_{\perp}^e(\vec{r}', t') | 0 \rangle = -i c \int_{\vec{r}-\vec{r}'}^{\vec{r}+\vec{r}'} d\vec{r}' \end{aligned}$$

Wir werden sehen, daß es oft nützlich ist im Fourier-
raum anstelle im Orts-/Zeitraum zu rechnen. $D_c(\vec{r}, \vec{r}', t)$
ist dabei nur eine Funktion von $\vec{r}-\vec{r}'$ und $t-t'$.

F-Trafo in $\vec{r}$ und t liefert mit $k_{\mu} x^{\mu} = \omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}$

$$X(k) = X(k_0, \vec{k}) = X(\omega, \vec{k}) =$$

$$\equiv \int_{-\infty}^{\infty} d^3 \vec{r} \int_{-\infty}^{\infty} dt \quad e^{i k_{\mu} x^{\mu}} X(\vec{r}, t)$$

die Relation

$$-(\omega^2 - \vec{k}^2) D_c^{ke}(\omega, \vec{k}) = - \int d^3 r \quad e^{-i \vec{k} \cdot \vec{r}} \delta_{\perp}^{ke}(\vec{r})$$

Nun ist

$$\delta_{\perp}^{ke}(\vec{r}) = \delta_{ke} \delta^{(3)}(\vec{r}) - \delta_{||}^{ke}(\vec{r})$$

$$= \delta_{ke} \delta^{(3)}(\vec{r}) - \frac{1}{4\pi} \left[\vec{\nabla} \circ \vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r}|} \right]^{ke}$$

F-Trafo

$$\int d^3 r \quad e^{-i \vec{k} \cdot \vec{r}} \delta_{\perp}^{ke}(\vec{r}) = -\delta_{ke} - \frac{k_{||} k_e}{k^2}$$

D.h.,

$$D_{\epsilon}^{ij}(k) = D_{ij}^{\epsilon}(k) = \frac{\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{|\vec{k}|^2}}{\omega^2 - \vec{k}^2 + i\epsilon}$$

elm. Propagator
im F-Raum

wobei das "+iε" eingeführt wurde um den Pol bei $\omega = |\vec{k}|$ ins komplexe zu verschieben

(B) elm. Feld in Lorentzrichtung

Will man die QED explizit Lorentzinvariant formulieren, muß man um das Problem, des nicht existierenden konjugierten Feldes zu A_0 zu beseitigen einen eichfixierenden Term zur Lagrangedichte addieren, (siehe I.4 B)

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\alpha} \partial_{\mu} A^{\mu} \partial_{\nu} A^{\nu}$$

$$= -\frac{1}{4} (\partial_{\mu} A_{\nu} - \partial_{\nu} A_{\mu}) (\partial^{\mu} A^{\nu} - \partial^{\nu} A^{\mu}) - \frac{1}{2\alpha} \partial_{\mu} A^{\mu} \partial_{\nu} A^{\nu}$$

dann ist

$$\pi^0 = -\frac{1}{\alpha} \partial_{\mu} A^{\mu}$$

Lorentzrichtung in der Quantenfeldtheorie ist dann durch die Einschränkung erlaubter Zustände gemäß

$$\partial_{\mu} \hat{A}^{\mu} |\phi\rangle = 0$$

Gupta-Bleuler

gewährleistet.

Die aus der erweiterten Lagrange dichte folgende Bewegungsgleichung lautet

$$\square A^\nu - \left(1 - \frac{1}{2}\right) \partial^\nu \partial_\mu A^\mu = 0$$

bzw.

$$\left[\square g^{\nu\mu} - \left(1 - \frac{1}{2}\right) \partial^\nu \partial^\mu \right] A_\mu = 0$$

Der Parameter α ist im Prinzip noch frei.

• Eine einfache Bewegungsgleichung erhält man für $\alpha = 1$ (Feynman- oder Feynman-Gleichung)

$$\square A^\nu = j^\nu \quad \text{bzw} \quad \square g^{\nu\mu} A_\mu = j^\nu$$

wobei j^ν hier eine mögliche äußere Quelle bezeichnet.
fundamentale Kommutatoren

$$\left[\hat{A}^\mu(\vec{r}, t), \hat{\pi}^\nu(\vec{r}', t) \right] = i g^{\mu\nu} \delta(\vec{r} - \vec{r}') \quad \pi^\nu \equiv \partial_t A^\nu$$

• Analog zu (A) zeigt man, daß

$$D_{\mu\nu}(\vec{r}, t; \vec{r}', t') = -i \langle 0 | T \hat{A}_\mu(x) \hat{A}_\nu(x') | 0 \rangle$$

Greensche Funktion ist, d.h. ($x = (t, \vec{r})$)

$$\square g^{\nu\mu} D_{\mu\lambda}(x, x') = \delta_\lambda^\nu \delta^{(4)}(x - x')$$

wobei δ_λ^ν das Kronecker-Delta ist.

Entsprechend gilt

$$\begin{aligned} D^{\mu\nu}(x, x') &= g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} D_{\alpha\beta}(x, x') \\ &= -i \langle 0 | T \hat{A}^\mu(x) \hat{A}^\nu(x') | 0 \rangle \end{aligned}$$

und

$$\square D^{\mu\nu}(x, x') = g^{\mu\nu} \delta^{(4)}(x - x')$$

F-Trafo liefert hier

$$D^{\mu\nu}(k) = \frac{-g^{\mu\nu}}{\omega^2 - \vec{k}^2 + i\varepsilon} = \frac{g^{\mu\nu}}{-k_\mu k^\mu - i\varepsilon}$$

(c) Dirac-Feld

Die Diracgleichung in einem äußeren, elen. Feld lautet

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi = -e \gamma^\mu A_\mu \psi$$

Der Propagator $S(x, x')$ ($x \equiv (t, \vec{x})$) der Diracgleichung ist definiert durch

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)_x S(x, x') = \delta(x - x')$$

F-Trafo liefert

$$(\gamma^\mu k_\mu - m) S(k) = 1$$

Nach Hinzufügen eines "ie" Terms ergibt sich schließlich

$$S(k) = \frac{1}{g^M k_\mu - m + i\varepsilon} = \frac{1}{k - m + i\varepsilon}$$

Auch hier lässt sich zeigen (Ü.A.)

$$S(x, x') = -i \langle 0 | T \psi(x) \bar{\psi}(x') | 0 \rangle$$

Man beachte S ist eine 4×4 Matrix. Um die Matrixstruktur in expliziter Form zu haben, kann man folgende Umformung verwenden

$$S(k) = \frac{1}{k - m + i\varepsilon} = \frac{k + m}{k_\mu k^\mu - m^2 + i\varepsilon}$$

und damit

$$S_{\alpha\beta}(x, x') \equiv -i \langle 0 | T \psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(x') | 0 \rangle$$

$$\Rightarrow S_{\alpha\beta}(k) = \frac{(k + m)_{\alpha\beta}}{k_\mu k^\mu - m^2 + i\varepsilon}$$

dabei ist

$$(k + m)_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} k_\mu + m \delta_{\alpha\beta}$$

IV.3 Einführung in die diagrammatische Störungstheorie: ϕ^3 -Theorie

betrachten als illustratives Beispiel ϕ^3 Theorie

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{\text{int}}$$

$$\mathcal{L}_{1,2} = : \frac{\partial \hat{\Phi}_i^+}{\partial x^\mu} \frac{\partial \hat{\Phi}_i}{\partial x^\mu} - m_i^2 \hat{\Phi}_i^+ \hat{\Phi}_i : \quad \begin{array}{l} \text{geladenes} \\ \text{KG Feld} \end{array}$$

$$\mathcal{L}_0 = : \frac{1}{2} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x^\mu} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial x^\mu} - m_\phi^2 \hat{\phi}^2 : \quad \begin{array}{l} \text{neutrales} \\ \text{KG Feld} \end{array}$$

WW-Lagrangian

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = -\lambda_1 : \hat{\Phi}_1^+(x) \hat{\Phi}_1(x) \hat{\phi}(x) : - \lambda_2 : \hat{\Phi}_2^+(x) \hat{\Phi}_2(x) \hat{\phi}(x) : \\ - \frac{\lambda}{3!} : \hat{\phi}^3(x) : = -\mathcal{H}_{\text{I}}$$

Bem.: Normalordnung
damit $\langle 0 | \mathcal{H}_{\text{I}} | 0 \rangle = 0$

Modenzersetzung der Felder

$$\hat{\Phi}_i(x) = \sum_p \left(\hat{d}_{ip} \hat{\Phi}_{ip}^{(+)}(x) + \hat{c}_{ip}^+ \hat{\Phi}_{i-p}^{(-)}(x) \right)$$

$$\hat{\phi}(x) = \sum_k \left(\hat{a}_k \hat{\phi}_k^{(+)}(x) + \hat{a}_k^+ \hat{\phi}_{-k}^{(-)}(x) \right)$$

KG-Wellenfunktionen

$$\phi_k^{(\pm)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2E_k L^3}} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} \mp E_k t)}$$

analog $\hat{\Phi}_{ip}^{(\pm)}$

Zeitentwicklungsoperator im WW-Bild

$$U_I = 1 - i \int d^4x \mathcal{H}_I(x) + \frac{(-i)^2}{2} \int d^4x_1 \int d^4x_2 T[\mathcal{H}_I(x_1) \mathcal{H}_I(x_2)] \\ + \dots$$

(A) Relativistischer Zerfall

neutrales Teilchen mit Impuls k $|k\rangle = \hat{a}_k^+ |0\rangle$

↓
Teilchen - Antiteilchenpaar vom Typ 1
mit Impuls $p, \bar{p}'$

$$|p, \bar{p}'\rangle = \hat{a}_{1p}^+ \hat{c}_{1p'}^+ |0\rangle$$

Quersrich deutet
Antiteilchen an

$$S = \langle p, \bar{p}' | U_I | k \rangle = ?$$

∃ Beitrag in 1. Ordnung in λ_1

$$S = -i \langle 0 | \hat{a}_{1p} \hat{c}_{1p'} \int d^4x \lambda_1 \hat{\Phi}_1^+(x) \hat{\Phi}_1(x) \hat{\varphi}(x) : \hat{a}_k^+ | 0 \rangle$$

(Bem: Zeitordnung kann formal eingeführt werden)

$$\hat{a}_{1p} \rightarrow \hat{a}_{1p}(\infty) \quad \hat{a}_k^+ \rightarrow \hat{a}_k^+(-\infty)$$

$$S = -i \int d^4x \lambda_1 \langle 0 | T \left[\underbrace{\hat{a}_{1p}(\infty) \hat{c}_{1p'}(\infty)}_{\text{Teilchen}} : \hat{\Phi}_1^+(x) \hat{\Phi}_1(x) \hat{\varphi}(x) : \underbrace{\hat{a}_k^+(-\infty)}_{\text{Antiteilchen}} \right] | 0 \rangle$$

von Null verschiedene Kontraktionen

Bose Felder = (Spin 0 k.G.-Felder)

$$S = -i \int d^4x \lambda_1 \langle 0 | T [\hat{a}_{1p}(\infty) \hat{\Phi}_1^+(x)] | 0 \rangle$$

$$\cdot \langle 0 | T [\hat{c}_{1p'}(\infty) \hat{\Phi}_1(x)] | 0 \rangle$$

$$\cdot \langle 0 | T [\hat{\varphi}(x) \hat{a}_k^+(-\infty)] | 0 \rangle$$

was ist

$$\langle 0 | T [\hat{a}_{1p}(\infty) \hat{\Phi}_1^+(x)] | 0 \rangle = \langle 0 | \hat{a}_{1p}(\infty) \hat{\Phi}_1^+(x) | 0 \rangle$$

$$= \Phi_{1p}^{(+)*}(x) = \frac{1}{\sqrt{2E_p L^3}} e^{-i(\vec{p}\vec{r} - E_p t)} = \frac{1}{\sqrt{2E_p L^3}} e^{+ipx}$$

$$\langle 0 | T [\hat{c}_{1p'}(\infty) \hat{\Phi}_1(x)] | 0 \rangle = \langle 0 | \hat{c}_{1p'}(\infty) \hat{\Phi}_1(x) | 0 \rangle$$

$$= \Phi_{1-p'}^{(-)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2E_{p'} L^3}} e^{i(-\vec{p}'\vec{r} + E_{p'} t)} = \frac{1}{\sqrt{2E_{p'} L^3}} e^{+ip'x}$$

$$\langle 0 | T [\hat{\varphi}(x) \hat{a}_k^+(-\infty)] | 0 \rangle = \langle 0 | \hat{\varphi}(x) \hat{a}_k^+(-\infty) | 0 \rangle$$

$$= \varphi_k^{(+)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2E_k L^3}} e^{i(\vec{k}\vec{r} - E_k t)} = \frac{1}{\sqrt{2E_k L^3}} e^{-ikx}$$

$\Rightarrow$

$$S = -i \lambda_1 \int d^4x \Phi_{1p}^{(+)*}(x) \Phi_{1-p'}^{(-)}(x) \varphi_k^{(+)}(x)$$

$$= -i \lambda_1 \int d^4x \frac{e^{i(p+p'-k)x}}{\sqrt{2^3 E_p E_{p'} E_k L^9}}$$

kontinuumslimit ($L \rightarrow 2\pi$)

$$S = -i \underbrace{(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p+p'-k)}_{j=}, \underbrace{TL}_{f_j}, \underbrace{\mathcal{M}}_{\text{green}}$$

■ Energie - Impulserhaltung in einlaufenden und auslaufenden Zuständen

$$f_j = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2 E_j}}$$

Amplitudenfaktor für alle einlaufenden bzw. auslaufenden Teilchen

■ $\mathcal{M}$ reduziertes Streumatrixelement in gegebener Ordnung d. Störungstheorie

hier $\mathcal{M} = \lambda_1$

• Dies ist die allgemeine Struktur der Streumatrix für Zufallsprozesse

(B) Relativistische Streuung in 1+1' Ordnung

geladenes Teilchen Sorte 1 p
+ geladenes Teilchen Sorte 2 q

$$|p, q\rangle = d_{1p}^+ d_{2q}^+ |0\rangle$$



geladenes Teilchen Sorte 1 p'
+ geladenes Teilchen Sorte 2 q'

$$|p', q'\rangle = d_{1p'}^+ d_{2q'}^+ |0\rangle$$

unv in 2. Ordnung von $\mathcal{H}_I$ möglich

↙ 2 Terme

$$S = \frac{(-i)^2}{2} 2 \lambda_1 \lambda_2 \int d^4 x_1 \int d^4 x_2$$

$$\langle 0 | \hat{d}_{1p'}^\dagger \hat{d}_{2q'}^\dagger T \left[: \hat{\Phi}_1^\dagger(x_1) \hat{\Phi}_1(x_1) \hat{\varphi}(x_1) : : \hat{\Phi}_2^\dagger(x_2) \hat{\Phi}_2(x_2) \hat{\varphi}(x_2) : \right] \hat{d}_{1p}^\dagger \hat{d}_{2q}^\dagger | 0 \rangle$$

von Null verschiedene Kontraktionen
(mit $d_{1p'} \rightarrow d_{1p'}(\infty)$ $d_{1p}^\dagger \rightarrow d_{1p}^\dagger(-\infty)$ etc)

$$S = - \underline{\lambda_1 \lambda_2} \int d^4 x_1 \int d^4 x_2 \underline{\Phi_{1p'}^{(+)*}(x_1) \Phi_{1p}^{(+)}(x_1)} \underline{\Phi_{2q'}^{(+)*}(x_2) \Phi_{2q}^{(+)}(x_2)}$$

$$\cdot \underline{\langle 0 | T [\hat{\varphi}(x_1) \hat{\varphi}(x_2)] | 0 \rangle}$$

Relativ - und Schwerpunktskoordinaten

$$R = \frac{1}{2} (x_1 + x_2)$$

$$[x = (\vec{r}, t)]$$

$$r = (x_1 - x_2)$$

$$\int d^4 x_1 \int d^4 x_2 \rightarrow \int d^4 R \int d^4 r$$

außerdem gilt wegen Translationsinvarianz der freien KG - Gleichung in Raum und Zeit:

$$\langle 0 | T [\hat{\phi}(x_1) \hat{\phi}(x_2)] | 0 \rangle = \langle 0 | T [\hat{\phi}(R + \frac{1}{2}r) \hat{\phi}(R - \frac{1}{2}r)] | 0 \rangle$$

$$= \langle 0 | T [\hat{\phi}(r) \hat{\phi}(0)] | 0 \rangle$$

$\Rightarrow$

$$S = -\lambda_1 \lambda_2 \int d^4 R \int d^4 r \frac{e^{i\{p'-p\}(R+\frac{1}{2}r) + \{q'-q\}(R-\frac{1}{2}r)\}}{\sqrt{2^4 (2\pi)^{12} E_p E_{p'} E_q E_{q'}}}$$

$$\langle 0 | T [\hat{\phi}(r) \hat{\phi}(0)] | 0 \rangle$$

Ausführung der R -Integration

$$S = -\lambda_1 \lambda_2 \frac{(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p' + q' - p - q)}{\sqrt{2^4 (2\pi)^{12} E_p E_q E_{p'} E_{q'}}$$

$$\cdot \int d^3 r e^{i(q'-q)r} \langle 0 | T [\hat{\phi}(r) \hat{\phi}(0)] | 0 \rangle$$

allgemeine Form ähnlich wie bei 2-fall

$$S = -i (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p' + q' - p - q) \prod_j \underline{\underline{f_j}} \underline{\underline{\mathcal{M}}}$$

jetzt mit

$$\mathcal{M} = -i \lambda_1 \lambda_2 \int d^4 r e^{i \Delta q \cdot r} \langle 0 | T [\hat{\phi}(r) \hat{\phi}(0)] | 0 \rangle$$

- Energie - Impulserhaltung der einlaufenden und auslaufenden Teilchen

- $f_j = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2 E_j}}$ Amplitudenfaktoren für ein- und auslaufende Teilchen

- $\mathcal{M} = -i \lambda_1 \lambda_2 \int d^4 r e^{i \Delta q_\mu r^\mu} \langle 0 | T [\hat{\phi}(r) \hat{\phi}(0)] | 0 \rangle$

$$\Delta q = q' - q = p - p' \quad 4\text{-Impulsübertrag}$$

reduziertes Streumatrixelement

wir sehen $\mathcal{M}$ enthält die $\bar{T}$ -Transformierte des Propagators des skalaren, reellen Klein Gordon Feldes

u.A.,

$$\begin{aligned} & -i \int d^4 r e^{i \Delta q_\mu r^\mu} \langle 0 | T [\hat{\phi}(r) \hat{\phi}(0)] | 0 \rangle \\ & = \frac{1}{\Delta q^2 - m_0^2 + i\epsilon} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \mathcal{M} = \frac{-\lambda_1 \lambda_2}{m_0^2 - (q' - q)^2 - i\epsilon}$$

(C) Einführung in Feynman Regeln

In (A) und (B) haben wir einfache Prozesse in niedrigster Ordnung der WW-Stärken α ; berechnet, dabei haben wir für den allgemein interessanten Fall von ein- und auslaufenden ebenen Wellen freie Teilchen folgende Struktur für das S-Matrixelement gefunden

S-Matrixelement für relativistische Zerfälle und Streuprozesse mit asymptotisch ebenen Wellenzuständen freier Teilchen

$$S = -i (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(\sum_{in} p - \sum_{out} p' \right) \prod_j f_j \mathcal{M}$$

$$(2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(\sum_{in} p - \sum_{out} p' \right)$$

Energie-Impulserhaltung
aller einlaufenden und
auslaufenden Teilchen

$$f_j = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3 2E_j}}$$

Amplitudenfaktoren
aller asymptotischer
Wellen

$\mathcal{M}$

reduziertes S-Matrix-
element

Für kompliziertere Prozesse oder in höherer Ordnung

der Störungstheorie ist die Berechnung von $\mathcal{M}$ hinreichend kompliziert!

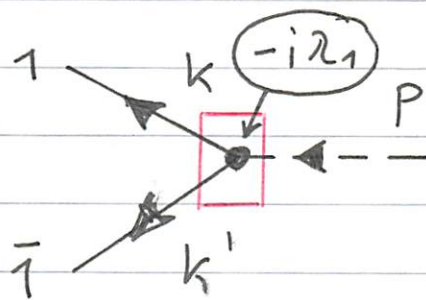
$\Rightarrow$ einfaches Regelwerk (R.P. Feynman)
zur Berechnung von $\mathcal{M}$

Feynmanregeln

Feynmandiagramme

zur Veranschaulichung der Faktoren für einen Beitrag zum S-Matrixelement

(i) relativistischer Zerfall in 1. Ordnung von λ_1



auslaufende
Teilchen / Antiteilchen
mit $\mathcal{H}$ -Impuls
 k, k'

einlaufendes
Teilchen (siehe 0)
mit $\mathcal{H}$ -Impuls p

$-i\lambda_1$ Vertex

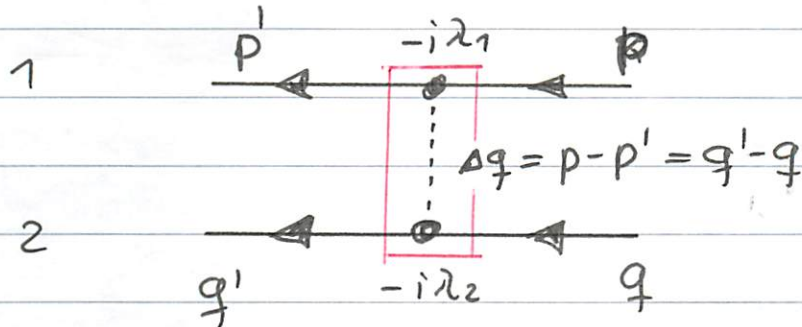
aus WW-Operator

$-i\mathcal{H}_{1\mathcal{H}}$

$$\mathcal{M} = i(-i\lambda_1) = \lambda_1$$

- 141 -

(ii) relativistische Streuung in $\mathcal{O}(\lambda_1, \lambda_2)$



o-----o Propagator der Felder ϕ mit
Impuls $\Delta q = q' - q = p - p'$

$-i\lambda_1, -i\lambda_2$ Vertizes aus WW Operatoren
 $-i\mathcal{H}_{1I}$ bzw. $-i\mathcal{H}_{2I}$

$$\mathcal{M} = \underbrace{i}_{\text{Regel 0}} \underbrace{(-i\lambda_1)(-i\lambda_2)}_{\text{Regel 1}} \underbrace{\frac{i}{\Delta q^2 - m_\phi^2 + i\epsilon}}_{\text{Regel 2}}$$

$\Rightarrow$ erste 3 Feynmanregeln zur Berechnung von $\mathcal{M}$

- (i) Man zeichne alle topologisch verschiedenen Diagramme die einen gegebenen Streuprozess in gegebener Ordnung der Störungstheorie (= Anzahl der Vertizes) entsprechen.
- (ii) Man finde den mathematischen Ausdruck der jedem Diagramm entspricht und addiere die Ausdrücke für alle Diagramme

Dabei gilt

Regel 0: Ein Faktor i

Regel 1: Ein Faktor $-i\lambda_j$ für jeden Vertex an dem ein neutrales Teilchen emittiert oder absorbiert wird

Regel 2: Für jede interne Linie einen Faktor der dem Propagator des skalaren Teilchens mit 4-Impulsübertrag Δq entspricht. Δq ergibt sich aus 4-Impulserhaltung an jedem Vertex

Bem: (i) einige Regeln (hier 0 und 2) sind von allgemeingültiger Form, einige (hier 1) sind für die konkrete Theorie spezifisch und müssen ggf. verallgemeinert werden

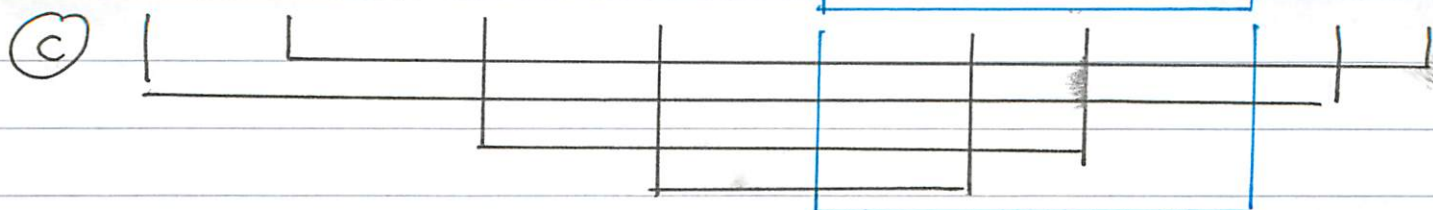
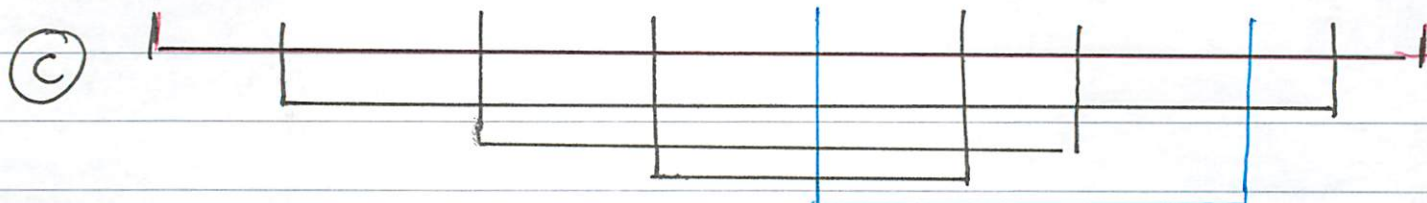
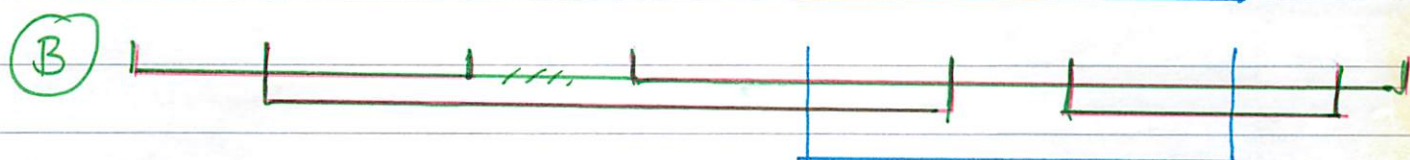
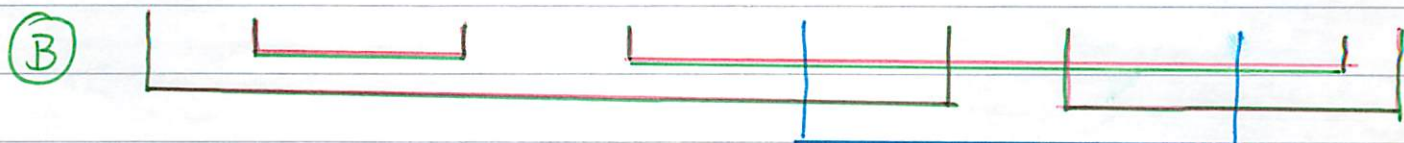
(ii) wir werden noch weitere Regeln kennenlernen

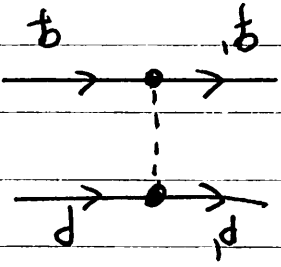
(c) Relativistische Strahlung in 2. Ordnung λ_1

- in bisherigen Beispielen: einlaufende und auslaufende Teilchen unterscheidbar
- jetzt: identische Teilchen im Ein- und Ausgang

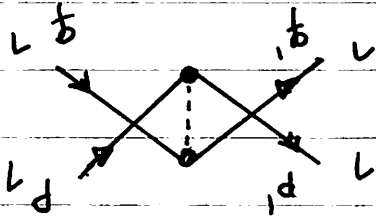
$$S = \frac{(-i)^2}{2} \lambda_1^2 \int d^4 x_1 \int d^4 x_2$$

$$\langle 0 | \hat{d}_{1p} \hat{d}_{1q}^\dagger T [: \hat{\Phi}_1^+(x_1) \hat{\Phi}_1(x_1) \hat{\varphi}(x_1) : : \hat{\Phi}_1^+(x_2) \hat{\Phi}_1(x_2) \hat{\varphi}(x_2) :] \hat{d}_{1p}^\dagger \hat{d}_{1q}^\dagger | 0 \rangle$$





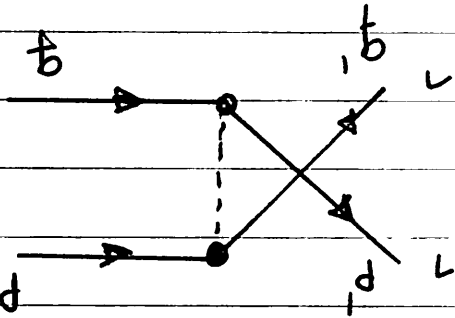
$=$



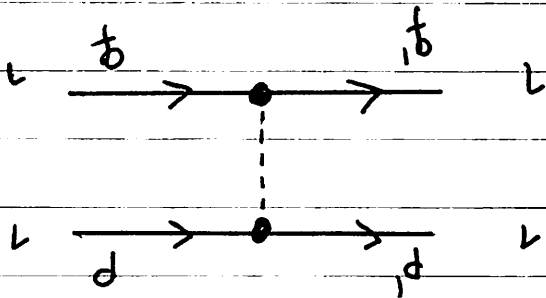
(II)

Bem.: (i) man hätte auch den Anfangszustand nehmen können, aber nur einen von beiden

Regel 4: Symmetrisiere zwischen identischen Bosonen im Endzustand



+



$$\mathcal{M} = \frac{\lambda_1^2 (p' - p)^2 - m_\phi^2 + i\epsilon}{\lambda_2^2} + \frac{\lambda_1^2 (q' - q)^2 - m_\phi^2 + i\epsilon}{\lambda_2^2}$$

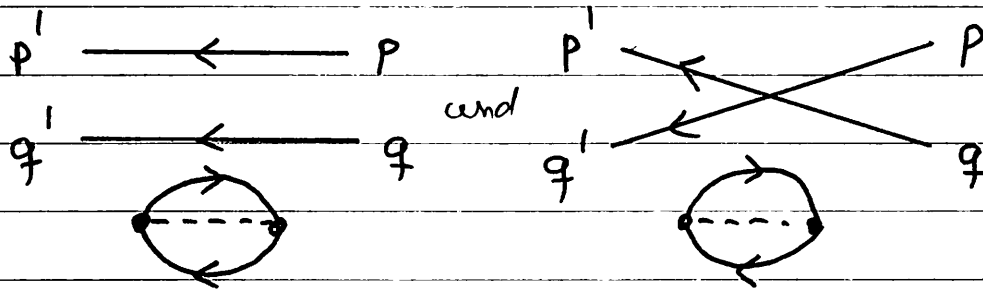
D.h. für die Beiträge aus (A) und (B) zusammen gilt

$$\textcircled{B}: \mathcal{M} = \frac{\lambda_1^2 (q' - p)^2 - m_\phi^2 + i\epsilon}{\lambda_2^2}$$

$$\textcircled{A}: \mathcal{M} = \frac{\lambda_1^2 (p' - p)^2 - m_\phi^2 + i\epsilon}{\lambda_2^2}$$

► Was ist mit Termen (c) ?

sie entsprechen unverbundenen Diagrammen



Verbundgraphentheorem

In einer konsistenten störungstheoretischen Entwicklung der S-Matrix treten keine unverbundenen Diagramme (Diagramme die nicht an äußere Linien gebunden sind) auf.

Beweisidee

$$S_{\beta\alpha} = \langle \alpha | \hat{U}_I(\infty, -\infty) | \beta \rangle$$

$$\rightarrow S_{\beta\alpha} = \frac{\langle \alpha | \hat{U}_I(\infty, -\infty) | \beta \rangle}{\underbrace{\langle 0 | \hat{U}_I(\infty, -\infty) | 0 \rangle}_{\text{Phasenfaktor}}}$$

- 144 -

$$\Rightarrow \langle p_1' q_1' | U_I | p_1 q_1 \rangle = \left[\text{diagram with two vertices and a loop} \right] + \dots + \left[\text{diagram with two vertices and a loop} \right]$$

$$\text{diagram with a loop} + 1 =$$

$$\langle 0 | U_I | 0 \rangle =$$

andere seih gilt:

$$\dots + \left[\text{diagram with two vertices and a loop} \right] + \left[\text{diagram with two vertices and a loop} \right]$$

$$\left[\text{diagram with two vertices and a loop} \right] + \left[\text{diagram with two vertices and a loop} \right]$$

$$\text{diagram with two vertices and a loop} + \text{diagram with two vertices and a loop}$$

$$\text{diagram with two vertices and a loop} + \text{diagram with two vertices and a loop} =$$

$$\langle p_1' q_1' | U_I | p_1 q_1 \rangle =$$

(D) Blasendiagramme in 2. Ordnung von $\mathcal{L}$

betrachten ein einlaufendes neutrales Teilchen
und ein auslaufendes neutrales Teilchen
in 2. Ordnung von $\mathcal{L}$

$$S = \frac{(-i)^2}{2} \frac{\lambda^2}{(3!)^2} \int d^4x_1 \int d^4x_2$$

$$\langle 0 | \hat{a}_k T \left[\underbrace{\hat{\phi}(x_1) \hat{\phi}(x_1) \hat{\phi}(x_1)}_{3 \text{ Möglichkeiten}} \underbrace{\hat{\phi}(x_2) \hat{\phi}(x_2) \hat{\phi}(x_2)}_{3 \text{ Möglichkeiten}} \right] \hat{a}_k^\dagger | 0 \rangle$$

2 Möglichkeiten

3 Möglichkeiten

3 Möglichkeiten

3 Möglichkeiten

3 Möglichkeiten

$$= \frac{(-i)^2}{2} \frac{\lambda^2}{2} \int d^4x_1 \int d^4x_2 \langle 0 | T \hat{a}_k(\infty) \hat{\phi}(x_1) | 0 \rangle$$

$$\langle 0 | T [\hat{\phi}(x_1) \hat{\phi}(x_2)] | 0 \rangle^2 \langle 0 | T [\hat{\phi}(x_2) \hat{a}_k^\dagger(\infty)] | 0 \rangle$$

$$\Rightarrow + x_1 \leftrightarrow x_2$$

$$S = \frac{(-i)^2 \lambda^2}{4} \frac{1}{\sqrt{2^2 E_k E_{k'} (2\pi)^6}}$$

$$\int d^4x_1 \int d^4x_2 e^{-ik'x_2} e^{ikx_1} \langle 0 | T [\hat{\phi}(x_1) \hat{\phi}(x_2)] | 0 \rangle^2$$

$$+ x_1 \leftrightarrow x_2$$

wieder $R = \frac{1}{2} (x_1 + x_2)$

$$r = x_1 - x_2$$

$$S = \frac{(-i)^2 \lambda^2}{4} \frac{1}{\sqrt{2^2 (2\pi)^6 E_k E_{k'}}$$

$$\int d^4 r \int d^4 R e^{ik(R+\frac{1}{2}r)} e^{-ik'(R-\frac{1}{2}r)} \langle 0 | T [\varphi(r) \varphi(0)] | 0 \rangle^2$$

+ $r \rightarrow -r$

$$S = - \frac{\lambda^2}{4} f_k f_{k'} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k-k') \int d^4 r e^{ikr} \left(\langle 0 | T [\varphi(r) \varphi(0)] | 0 \rangle \right)^2$$

+ $r \rightarrow -r$

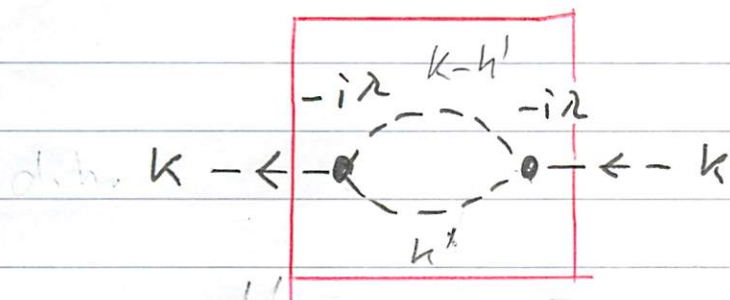
man gilt (Faltungssatz)

$$\int d^4 r e^{ikr} h(r)^2 = \int \frac{d^4 h'}{(2\pi)^4} \tilde{h}(h') \tilde{h}(k-h')$$

d.h.,

$$S = - \frac{\lambda^2}{2} f_k^2 \delta^{(4)}(k-k')$$

$$(2\pi)^4 \int \frac{d^4 h'}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - m_0^2 + i\varepsilon} \frac{1}{(k-h')^2 - m_0^2 + i\varepsilon}$$



sog. "loop" oder
Blasendiagramm

d.h.

$$M = i (-i\lambda)^2 \frac{1}{2!} \int \frac{d^4 k'}{(2\pi)^4} \frac{i}{k'^2 - m_0^2 + i\varepsilon} \frac{i}{(k-k')^2 - m_0^2 + i\varepsilon}$$

• Regel 5:

Integriere über alle 4-Impulse die nicht durch die Energie-Impulserhaltung und externe Linien fixiert sind mit Gewicht

$$\int \frac{d^4 k'}{(2\pi)^4}$$

• Regel 7:

Multipliziere Blasendiagramme mit n internen Linien identischer Bosonen mit einem Faktor $\frac{1}{n!}$

Bem: Blasendiagramme liefern in der Regel divergente Ausdrücke und sind die Ursache für die mathematischen Probleme der Theorie $\Rightarrow$ Renormierungstheorie