

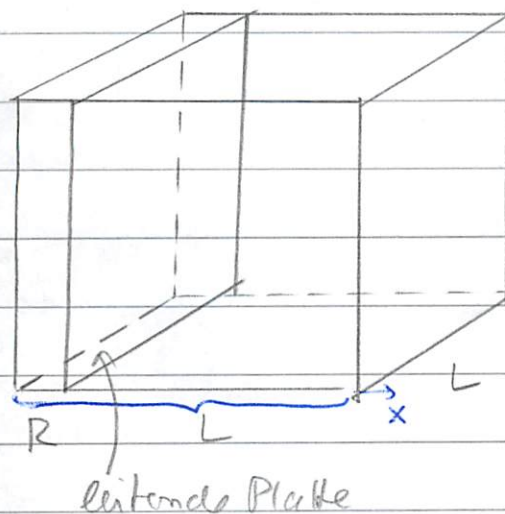
III. Einige einfache Effekte der Feldquantisierung:

QED

III.1 Vakuumenergie des elm. Feldes und Casimirkraft

Bei der Quantisierung des elm. Feldes hatten wir gesehen, daß ein Vakuumbeitrag auftrat. Auch wenn dieser Vakuumbeitrag als solcher nicht meßbar und daher ohne Konsequenzen ist, führen Änderungen der Vakuumenergie durch Änderungen von Randbedingungen zu meßbaren Kräften.

Quantisierung im Volumen L^3 mit offenen RB



$$R \ll L$$

Offene RB:

$$k_n = \frac{\pi}{L} n \quad n=0,1,2$$

$$\Delta E = \langle 0 | \hat{H}_R | 0 \rangle + \langle 0 | \hat{H}_{L-R} | 0 \rangle - \langle 0 | \hat{H}_L | 0 \rangle$$

$$\langle 0 | \hat{H} | 0 \rangle = \sum_{n_x, n_y, n_z} \omega_n = \frac{\pi}{L} \sum_{n_x, n_y, n_z=0}^{\infty} \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2} \frac{\pi}{L}$$

$$\approx -\frac{V}{L} \frac{1}{8} 4\pi \int_0^\infty dn n^2 n = -\frac{L^3}{2\pi^2} \int_0^\infty dk k^3 \rightarrow \infty$$

Da das Integral divergent ist führen wir eine kumulierend glatte cut-off Funktion $f(k/k_c)$ ein mit cut-off Frequenz k_c

$$\begin{aligned} f\left(\frac{k}{k_c}\right) &\rightarrow 1 & k \ll k_c \\ f\left(\frac{k}{k_c}\right) &\rightarrow 0 & k \gg k_c \end{aligned}$$

$$\langle 0 | \hat{H} | 0 \rangle = \frac{L^3}{2\pi^2} \int_0^\infty dk f\left(\frac{k}{k_c}\right) k^3$$

D.h.

$$\langle 0 | \hat{H}_L | 0 \rangle = \frac{L^3}{2\pi^2} \int_0^\infty dk f\left(\frac{k}{k_c}\right) k^3$$

$$\langle 0 | \hat{H}_{L-R} | 0 \rangle = \frac{L^2(L-R)}{2\pi^2} \int_0^\infty dk f\left(\frac{k}{k_c}\right) k^3$$

Bei der Berechnung von $\langle 0 | \hat{H}_R | 0 \rangle$ müssen wir die diskrete Struktur der Moden ($R \ll L$) berücksichtigen

$$\langle 0 | \hat{H}_R | 0 \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\left(1 - \frac{1}{2} \delta_{n0}\right)}_{\text{Polarisation}} \frac{L^2}{\pi^2} g\left(\frac{n\pi}{R}\right)$$

für $n=0$ gibt es nur 1 Polarisationsrichtung
da $\vec{E}_{||} = 0$ wobei $|| \hat{=}$ parallel zur Platte

Mit

$$g(k_x) = \int_0^\infty dk_y dk_z k f\left(\frac{k}{k_c}\right) \quad k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$$

$$\int_0^{\infty} dk_x g(k_x) = \frac{4\pi}{8} \int_0^{\infty} dk k^2 k f\left(\frac{k}{k_c}\right)$$

$$\Rightarrow \Delta E = \frac{L^2}{\pi^2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2} \delta_{n0}\right) g\left(\frac{n\pi}{R}\right) - \frac{R}{\pi} \int_0^{\infty} dk_x g(k_x) \right)$$

Zur Vereinfachung führen wir ein $k_{\perp} = \sqrt{k_y^2 + k_z^2}$

$$g(k_x) = \frac{2\pi}{4} \int_0^{\infty} dk_{\perp} k_{\perp} \sqrt{k_x^2 + k_{\perp}^2} f\left(\frac{\sqrt{k_x^2 + k_{\perp}^2}}{k_c}\right)$$

Setzen $k_{\perp} = \alpha \frac{\pi}{R}$ $k_x = n \frac{\pi}{R}$

$$g(k_x) = \frac{\pi}{2} \frac{\pi^3}{R^3} \int_0^{\infty} d\alpha \sqrt{n^2 + \alpha^2} \alpha f\left(\frac{\pi \sqrt{n^2 + \alpha^2}}{R k_c}\right)$$

nun $\omega = n^2 + \alpha^2$, $d\omega = 2\alpha d\alpha$

$$g(k_x) = \frac{\pi^4}{4R^3} \underbrace{\int_{n^2}^{\infty} d\omega \sqrt{\omega} f\left(\frac{\pi \sqrt{\omega}}{R k_c}\right)}_{\equiv F(n)}$$

$$\Rightarrow \Delta E = \frac{L^2 \pi^2}{4R^3} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2} \delta_{n0}\right) F(n) - \int_0^{\infty} dn F(n) \right]$$

Euler McLaurin Formel

$$h(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} h(k) \approx \frac{1}{2} h(0) + \int_0^{\infty} dk h(k)$$

$$+ \sum_{n=2}^p \frac{B_n}{n!} h^{(n-1)}(0) + \text{Rest} \rightarrow 0$$

$$\text{mit } B_2 = 1/6, B_3 = 0, B_4 = -1/30, B_5 = 0, \dots$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2} \delta_{n0}\right) F(n) - \int_0^{\infty} dn F(n) \approx$$
$$\approx -\frac{1}{6 \cdot 2!} F'(0) + \frac{1}{30 \cdot 4!} F'''(0) + \dots$$

nun ist

$$F'(n) = -2n^2 f\left(\frac{\pi n}{Rk_c}\right)$$

$$F''(n) = -4n f\left(\frac{\pi n}{Rk_c}\right) - 2n^2 f'\left(\frac{\pi n}{Rk_c}\right) \frac{\pi}{Rk_c}$$

$$F'''(n) = -4 f\left(\frac{\pi n}{Rk_c}\right) - 8n f'\left(\frac{\pi n}{Rk_c}\right) \frac{\pi}{Rk_c}$$
$$- 2n^2 f''\left(\frac{\pi n}{Rk_c}\right) \left(\frac{\pi}{Rk_c}\right)^2$$

$$\text{d.h. } F'(0) = F''(0) = 0$$

$$F'''(0) = -4 f(0) = -4$$

Damit ergibt sich

$$\Delta E = - \frac{L^2 \pi^2}{720 R^3}$$

Casimirenergie
zwischen leitenden
Platten im Abstand R
($k_c R \gg 1$)

Bem:

- Casimirenergie ist negativ
 $\Rightarrow$ anziehende Kraft.

$$f = \frac{F}{L^2} = - \frac{1}{L^2} \frac{\partial(\Delta E)}{\partial R} = - \frac{\pi^2}{240 R^4}$$

Flächenkraftdichte

- Im Ausdruck für ΔE taucht die auf-off Funktion nicht mehr explizit auf
- in physikalischen Einheiten

$$f = - \frac{\hbar c \pi^2}{240 R^4}$$

Diese Kraft ist sehr klein und schwer
meßbar. Erste Messung:

M. J. Sparnaay Physica 24 (1958) 751-764

III.2 Zerfall & Streuung: Allgemeines

Eine häufige Aufgabe in der QFT wird es sein Übergangsmatrixelemente zwischen asymptotischen Zuständen zu berechnen die Eigenzustände eines Teils des Hamiltonoperators (freier Hamiltonoperator $\hat{H}_0$) sind.

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_I$$

Solche Größen werden zweckmäßigerweise im Wechselwirkungsbild berechnet

$$|\psi(t)\rangle = T \exp \left\{ -i \int_0^t d\tau \hat{H}_I(\tau) \right\} |\psi(0)\rangle$$

mit

$$\hat{O}(\tau) = e^{i\hat{H}_0\tau} \hat{O}(0) e^{-i\hat{H}_0\tau}$$

Es seien $|\psi_\alpha\rangle, |\psi_\beta\rangle$ asymptotische Zustände, d.h. z.B. Eigenzustände von $\hat{H}_0$. Dann gibt die Größe

$$S_{\beta\alpha} = \frac{1}{\mathcal{N}} \langle \psi_\beta | \hat{U}_I(\infty, -\infty) | \psi_\alpha \rangle$$

mit

$$\hat{U}_I(t_2, t_1) = T \exp \left\{ -i \int_{t_1}^{t_2} d\tau \hat{H}_I(\tau) \right\}$$

ein Maß für die Übergangsamplitude aus einem Zustand $|\psi(t=-\infty)\rangle = |\psi_\alpha\rangle$ in einen Zustand $|\psi(t=+\infty)\rangle = |\psi_\beta\rangle$ an. $\mathcal{N}$ ist ein geeignet gewählter

Phasenfaktor. Wenn gilt, daß die Wechselwirkung für $|t| \rightarrow \infty$ asymptotisch ausgeschaltet ist, d.h.

$$\hat{H}_I(t) \xrightarrow{|t| \rightarrow \infty} 0$$

muß z.B. gelten, daß der Grundzustand von $\hat{H}$ (der asymptotisch identisch mit GZ von $\hat{H}_0$ identisch ist) in der Zeitevolution $t = -\infty \rightarrow t = +\infty$ in sich übergeht (bis auf einen Phasenfaktor), d.h.

$$\langle g_{z_0} | \hat{U}_I(\infty, -\infty) | g_{z_0} \rangle = e^{i\phi}$$

Diesem Phasenfaktor wählt man als Referenzphase.

Streu matrix

$$S_{\beta\alpha} = \frac{\langle \psi_\beta | \hat{U}_I(\infty, -\infty) | \psi_\alpha \rangle}{\langle g_{z_0} | \hat{U}_I(\infty, -\infty) | g_{z_0} \rangle}$$

Ein Maß für die Übergangswahrscheinlichkeit pro Zeiteinheit ist die Größe

$$\Delta W_{\beta\alpha} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|S_{\beta\alpha}(T/2, -T/2)|^2}{T}$$

Wir werden sehen, daß $S_{\beta\alpha}(T/2, -T/2)$ für Zerfallsprozesse in der Form

$$S_{\beta\alpha}(T_2, -T_2) = -2\pi i \frac{T}{\pi} \frac{\sin(\Delta E T/2)}{\Delta E T} \left(\frac{1}{L^3}\right)^{p-1} f_{\beta\alpha}$$

geschrieben werden kann, wobei

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} dt e^{-i(E_\alpha - E_\beta)t} = \boxed{\frac{T}{\pi} \frac{\sin(\Delta E \frac{T}{2})}{\Delta E T} \equiv d_1(T)}$$

benutzt wurde, p die Anzahl der Teilchen im Endzustand und $f_{\beta\alpha}$ ein reduziertes Matrixelement bedeuten.
Es gilt

$$\lim_{T \rightarrow \infty} d_1(T) = \delta(E_\alpha - E_\beta)$$

Damit ist

$$\Delta W_{\beta\alpha} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{d_1^2(T)}{T} (2\pi)^2 \left(\frac{1}{L^3}\right)^{p-1} |f_{\beta\alpha}|^2$$

Nun führen wir ein

$$\boxed{d_2(T) \equiv (2\pi)^2 \frac{d_1^2(T)}{T} = 4T \frac{\sin^2(\Delta E \frac{T}{2})}{(\Delta E T)^2}}$$

Es gilt wiederum

$$\lim_{T \rightarrow \infty} d_2(T) = 2\pi \delta(E_\alpha - E_\beta)$$

Man beachte: Hätten wir den Grenzübergang $T \rightarrow \infty$ für $d_1(T)$ separat ausgeführt, hätten wir erhalten

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|2\pi \delta(E_\alpha - E_\beta)|^2}{T} = 2\pi \delta(E_\alpha - E_\beta)$$

Das ist oft eine nützliche Gleichung die den durchgeführten Grenzübergang zusammenfasst

D.h.

$$S_{\beta\alpha}^Z = -2\pi i \delta(E_\alpha - E_\beta) \left(\frac{1}{\sqrt{L^3}}\right)^{P-1} f_{\beta\alpha}$$

S-Matrixelement für Zerfallsprozesse

$$\Delta W_{\beta\alpha}^Z = 2\pi \delta(E_\alpha - E_\beta) \left(\frac{1}{L^3}\right)^{P-1} |f_{\beta\alpha}|^2$$

Übergangswahrscheinlichkeit pro Zeiteinheit für Zerfallsprozesse (Zerfallsrate)

Fermis Goldene Regel

Bei Streuprozessen ist der Eingangszustand eine ebene Welle und man hat einen zusätzlichen Normierungsfaktor $1/\sqrt{L^3}$. Daher findet man für

$$S_{\beta\alpha}^S = -2\pi i \delta(E_\alpha - E_\beta) \left(\frac{1}{\sqrt{L^3}}\right)^P f_{\beta\alpha}$$

S-Matrixelement für Streuprozesse

$$\Delta W_{\beta\alpha}^S = 2\pi \delta(E_\alpha - E_\beta) \left(\frac{1}{L^3}\right)^P |f_{\beta\alpha}|^2$$

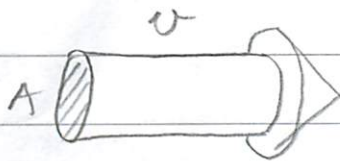
Eine aus Sp α berechenbare, wichtige experimentelle Größe ist der differenzielle Streuquerschnitt im Raumwinkel $\Delta\Omega$

$$\Delta\sigma_{\beta\alpha} = \frac{L^3}{v} \sum_{\beta \in \Delta\Omega} \Delta W_{\beta\alpha}^S$$

v - Geschwindigkeit der einfallenden Teilchen

einfallender Teilchen / Fläche und Zeit

$$\frac{n_0}{A} = \frac{1}{L^3} A v t = \frac{1}{A t} = \frac{v}{L^3}$$



$$\Delta\sigma_{\beta\alpha} = \frac{2\pi}{v} \sum_{\beta \in \Delta\Omega} \delta(E_\alpha - E_\beta) \left(\frac{1}{L^3}\right)^{p-1} |f_{\beta\alpha}|^2$$

III. 3 Spontane Emission

Wir betrachten ein Atom mit 2 relevanten Zuständen $|a\rangle$ und $|b\rangle$ und berechnen die Rate des spontanen Strahlungszerfalls. Das Atom wird als nichtrelativistisches Elektronenfeld im Coulombpotential des Kerns betrachtet. (Coulomb-Eichung) - $\vec{E} = -\nabla\phi$

$$\hat{H} = \hat{H}_{\text{elm}} + \hat{H}_C + \int d^3\vec{r} \, \psi^\dagger(\vec{r}) \left[\frac{1}{2m} (\vec{p} - e\vec{A})^2 \right] \psi(\vec{r})$$

$\hat{H}_{\text{elm}}$ - Hamiltonian des elm. Feldes

$\hat{H}_C$ - Coulombenergie des Atoms

Nach Abzug der kinetischen Energie der Elektronen ergibt sich der Wechselwirkungsanteil

$$\hat{H}_I = \int d^3\vec{r} \, \psi^\dagger(\vec{r}) \left[-\frac{e}{m} \vec{p} \cdot \vec{A} + \frac{e^2 \vec{A}^2}{2m} \right] \psi(\vec{r})$$

Bem: • In Coulombbeziehung gilt $[\vec{p}, \vec{A}] = 0$

Es sei

$$|\alpha\rangle = |a, 0\rangle$$

$$|\beta\rangle = |b, 1_{n,2}\rangle$$

↖ Photonenvakuum

↖ 1-Photonzust. in Mode $\vec{k}_n$ und Polarisation 2

1. Ordnung Störungstheorie

$$\begin{aligned} \langle \beta | \hat{H}_I(\infty, -\infty) | \alpha \rangle &= \langle \beta | T e^{-i \int_{-\infty}^{\infty} dt \hat{H}_I(t)} | \alpha \rangle \\ &= \langle \beta | \alpha \rangle - i \int_{-\infty}^{\infty} dt \langle \beta | \hat{H}_I(t) | \alpha \rangle \\ &\quad \parallel \quad \quad \quad 0 \end{aligned}$$

D.h.

$$S_{\beta\alpha}^{(1)} = -i \int_{-\infty}^{\infty} dt \langle \beta | \hat{H}_I(t) | \alpha \rangle$$

Man überzeugt sich leicht, daß der $\hat{A}^2$ Term hier nicht beiträgt.

Nach einiger Rechnung (Ü. A) findet man

$$\Delta W_{ba} = \sum_{\{1n_2\}} \Delta W_{\beta\alpha} = \frac{e^2}{4\pi} \left(\frac{4\omega_{ba}}{3m^2} \right) |\langle b | \vec{\hat{p}} | a \rangle|^2$$

Verwendet man

$$\vec{\hat{p}} = \frac{m}{i} [\vec{\hat{r}}, \hat{H}_0] = \frac{m}{i} (\vec{\hat{r}} \hat{H}_0 - \hat{H}_0 \vec{\hat{r}})$$

$$\begin{aligned} \langle b | \vec{\hat{p}} | a \rangle &= \frac{m}{i} \langle b | \vec{\hat{r}} | a \rangle (E_b - E_a) \\ &= \frac{m \omega_{ba}}{i} \langle b | \vec{\hat{r}} | a \rangle \end{aligned}$$

reduziert sich dies auf

$$\Delta W_{ba} = \frac{\omega_{ba}^3}{3\pi} |\vec{d}_{ba}|^2$$

$$\vec{d}_{ba} = e \langle b | \vec{\hat{r}} | a \rangle$$

Dipolmatrix-
element

Einsteinischer Koeffizient der Spontanemission

III.4. Lamb shift nach Bethe

Mithilfe von Mikrowellen-Techniken haben 1947 W.E. Lamb und W.E. Retherford eine Aufspaltung des $2S_{1/2}$ und $2P_{1/2}$ Zustandes gemessen. In der Dirac-Theorie sind diese Zustände exakt entartet. Die Aufspaltung, Lamb-shift genannt, ist ein reiner Effekt des quantisierten Strahlungsfeldes. (Lamb & Retherford Phys. Rev. 72, 241 (1947)). Die nachfolgende Rechnung geht auf Hans A. Bethe zurück (H.A. Bethe Phys. Rev. 72, 339 (1947)) die er angeblich auf einer Zugfahrt durchgeführt hat.

Wir verwenden wieder den nicht-relativ. WW-Operator

$$\hat{H}_I = \int d^3\vec{r} \quad \hat{\psi}^\dagger(\vec{r}) \left[-\frac{e}{m} \vec{p} \cdot \vec{A} + \frac{e^2 \vec{A}^2}{2m} \right] \hat{\psi}(\vec{r})$$

2. Ordnung Störungstheorie

$$\Delta E_\alpha = \langle \alpha | \hat{H}_I | \alpha \rangle + \sum_{\beta \neq \alpha} \frac{\langle \alpha | \hat{H}_I | \beta \rangle \langle \beta | \hat{H}_I | \alpha \rangle}{E_\alpha^{(0)} - E_\beta^{(0)}}$$

$$|\alpha\rangle = |a, 0\rangle$$

Abzug des divergenten Vakuumbeitrages von $\hat{H}_I$ der eine konstante Energierverschiebung aller Zustände des Elektronenfeldes bedeutet, d.h. $\vec{A}^2 \rightarrow :\vec{A}^2:$ liefert $\langle \alpha | \hat{H}_I | \alpha \rangle \equiv 0$.

Def: $[\hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2] = \hat{\phi}_1 \hat{\phi}_2 - \langle 0 | \hat{\phi}_1 \hat{\phi}_2 | 0 \rangle$

ignorieren $:\hat{A}: \text{ Term} \Rightarrow$
 einzige Beiträge zu $\langle \beta | \hat{H}_\pm | \alpha, 0 \rangle$ mit $|\beta\rangle \sim |1_{\vec{k}2}\rangle$

d.h. $|\beta\rangle = |b, 1_{\vec{k}2}\rangle$ $|b\rangle$ beliebig

In der Ü.A. zur spontanen Emission wird gezeigt,
 daß für Atome in Dipolapproximation gilt

$$\langle \beta | \hat{H}_\pm | \alpha \rangle = \frac{1}{L^3} e^{i(E_\beta - E_\alpha)t} f_{\beta\alpha}$$

$$f_{\beta\alpha} = \frac{e}{m} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}}} \vec{\epsilon}_{\vec{k}2}^* \cdot \langle b | \vec{p} | a \rangle$$

$$\Rightarrow \Delta E_a = \sum_b \sum_{\vec{k}, 2} \frac{1}{L^3} \frac{|f_{\beta\alpha}|^2}{E_a^{(0)} - E_b^{(0)} - \omega_{\vec{k}}}$$

Man beachte, daß die Summe über b auch $b=a$ enthält.

$$L \rightarrow \infty$$

$$\Delta E_a = \sum_{b, 2} \int \frac{d^3 k}{2\omega_k (2\pi)^3} \frac{e^2}{m^2} \frac{|\vec{\epsilon}_{\vec{k}2}^* \cdot \vec{p}_{ba}|^2}{E_a - E_b - \omega_{\vec{k}}}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_b \int_0^\infty \frac{d\omega}{E_a - E_b - \omega} \underbrace{\left[\frac{e^2}{4\pi} \frac{\omega}{2\pi m^2} \sum_2 \int d\Omega_k |\vec{\epsilon}_{\vec{k}2}^* \cdot \vec{p}_{ba}|^2 \right]}_{\equiv \tilde{\Delta W}_{ba}(\omega)}$$

$$\Delta E_a = \frac{1}{2\pi} \sum_b \int_0^\infty \frac{d\omega}{\underbrace{E_a - E_b - \omega}} \tilde{\Delta W}_{ba}(\omega)$$

Divergenz für $\omega = E_a - E_b$! $\Rightarrow \omega \rightarrow \omega - i\varepsilon$

Vorzeichenwahl entspricht retardierter Lösung. $(-i\varepsilon)$
 Es gilt für $\varepsilon \rightarrow 0$ (Ü.A.)

$$\frac{1}{E_a - E_b - \omega + i\varepsilon} = \mathcal{P} \frac{1}{E_a - E_b - \omega} - i\pi \delta(E_a - E_b - \omega)$$

wobei $\mathcal{P}$ den Hauptwert bezeichnet $B > \omega_0, A < \omega_0$

$$\int_A^B d\omega \mathcal{P} \frac{1}{\omega_0 - \omega} \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_A^{\omega_0 - \varepsilon} d\omega \frac{1}{\omega_0 - \omega} + \int_{\omega_0 + \varepsilon}^B d\omega \frac{1}{\omega_0 - \omega} \right]$$

Hauptwertintegral

D.h.

$$\Delta E_a = \frac{1}{2\pi} \sum_b \mathcal{P} \int_0^\omega d\omega \frac{\Delta \tilde{W}_{ba}(\omega)}{E_a - E_b - \omega} - \frac{i}{2} \sum_{\substack{b \\ E_a < E_b}} \Delta \tilde{W}_{ba}(\omega_{ba})$$

wobei $\omega_{ba} = E_b - E_a$

- Bem:
- der imaginäre Term entspricht der spontanen Zerfallsrate und wird an dieser Stelle nicht weiter diskutiert
 - der Realteil beschreibt die tatsächliche Energieverschiebung, er ist jedoch divergent!

$$\Delta \tilde{W}_{ba}(\omega) = \frac{e^2}{4\pi} \frac{\omega}{2\pi m^2} \sum \int d\Omega_{\vec{E}} |\vec{e}_{\vec{E}\lambda}^+ \cdot \vec{p}_{ab}|^2$$

Wir wollen nun die Orientierungsmittelung $\frac{1}{4\pi} \int d\Omega_{\vec{E}}$ ausführen.

$$\text{O.B.d.A.} \quad \vec{p}_{ab} = |\vec{p}_{ab}| \vec{e}_z$$

$\int d\Omega_{\vec{E}}$ ist gleichbedeutend mit $\int d\Omega_{\vec{n}}$

wobei $\vec{n} = \vec{e}_{k1}$ für $\lambda=1$ oder $\vec{n} = \vec{e}_{k2}$ für $\lambda=2$ ist. $\vec{e}_{k1}^* \cdot \vec{p}_{ab} = \cos\vartheta |\vec{p}_{ab}|$ bei lin. Polarisation

$$\Rightarrow \int d\Omega_{\vec{E}} |\vec{e}_{k1}^* \cdot \vec{p}_{ab}|^2 = 2\pi \int_0^\pi d\vartheta \sin\vartheta \cos^2\vartheta |\vec{p}_{ab}|^2$$

$$= 2\pi \int_{-1}^1 dz \frac{1}{2} z^2 |\vec{p}_{ab}|^2 = \frac{4\pi}{3} |\vec{p}_{ab}|^2 \stackrel{\sum}{\sim} \frac{8\pi}{3} |\vec{p}_{ab}|^2$$

$$\Rightarrow \Delta \tilde{W}_{ba}(\omega) = \frac{e^2}{4\pi} \left(\frac{4\omega}{3m^2} \right) |\vec{p}_{ab}|^2$$

$$\Delta E_a = \frac{e^2}{4\pi} \frac{2}{3\pi} \frac{1}{m^2} \sum_b \underbrace{\int_0^\infty d\omega \frac{\omega}{E_a - E_b - \omega}}_{\rightarrow \infty} |\vec{p}_{ab}|^2$$

Die hier auftretende Divergenz ist ein Charakteristikum von Quantenfeldtheorien.

Massenrenormierung

Um die Divergenz zu beseitigen oder wenigstens stark abzuschwächen brauchen wir eine Idee von Kramers: Auch das freie Elektron wechselwirkt mit dem Strahlungsfeld. D.h. die beobachtete Energiverschiebung ergibt sich aus der Differenz der Verschiebungen eines gebundenen und eines freien Elektrons mit derselben mittleren kinetischen Energie.

$$\Delta E^f = \frac{e^2}{4\pi} \frac{2}{3\pi} \frac{1}{m^2} \sum_b P \int_0^\infty d\omega \frac{\omega |\vec{p}_{ba}^f|^2}{\frac{p_a^2}{2m} - \frac{p_b^2}{2m} - \omega}$$

$$\begin{aligned} \vec{p}_{ba}^f &= \int d^3r \frac{1}{L^3} e^{-i(\vec{p}_b + \vec{k}) \cdot \vec{r}} (-i \vec{\nabla}) e^{i\vec{p}_a \cdot \vec{r}} \\ &= \vec{p}_a \delta^{(3)}(\vec{p}_a - \vec{p}_b - \vec{k}) \end{aligned}$$

Man beachte $|a\rangle = |a, 0\rangle$ und $|b\rangle = |b, 1_{\vec{k}_2}\rangle$
d.h. der auslaufende Zustand ist der einer Elektronen
plus eines Photons mit Wellenvektor $\vec{k}$.

$\delta^{(3)}(\vec{p}_a - \vec{p}_b - \vec{k})$ führt dazu, daß im Nenner

$$\begin{aligned} \frac{p_a^2}{2m} - \frac{p_b^2}{2m} - \omega &\rightarrow \frac{p_a^2}{2m} - \frac{(\vec{p}_a - \vec{k})^2}{2m} - \omega \\ &= \frac{\vec{p}_a \cdot \vec{k}}{2m} - \omega \left(1 + \frac{\omega}{2m}\right) \end{aligned}$$

Im nichtrelativistischen Grenzfall ist $|\vec{p}_a| \ll m$

$$\Delta E^f \simeq -\frac{e^2}{4\pi} \frac{2}{3\pi} \frac{|\vec{p}_a|^2}{m^2} P \int_0^\infty d\omega \frac{1}{1 + \frac{\omega}{2m}}$$

Dieser Ausdruck hat die Form

$$\Delta E^f \simeq -C \vec{p}^2$$

und kann damit als Massenumnormierung des Elektrons
interpretiert werden

$$\frac{\vec{p}^2}{2m_{\text{obs}}} = \frac{\vec{p}^2}{2m} - C \vec{p}^2 \quad m_{\text{obs}} = \frac{m}{1 - 2mC}$$

Damit ergibt sich für die beobachtbare Lambverschiebung

$$\Delta E_a^{\text{obs}} = \frac{e^2}{4\pi} \frac{2}{3\pi} \frac{1}{m^2} \rho \int_0^\infty d\omega \left[\sum_b \frac{\omega |\vec{p}_{ba}|^2}{E_a - E_b - \omega} + \frac{\langle a | \vec{p}^2 | a \rangle}{1 + \frac{\omega}{2m}} \right]$$

Mit

$$\begin{aligned} \vec{p}_{ba} \cdot \langle a | \vec{p}^2 | a \rangle &= \sum_b \langle a | \vec{p} | b \rangle \langle b | \vec{p} | a \rangle \\ &= \sum_b |\vec{p}_{ba}|^2 \end{aligned}$$

und $\omega \ll m$ folgt

$$\Delta E_a^{\text{obs}} = \frac{e^2}{4\pi} \frac{2}{3\pi} \frac{1}{m^2} \rho \int_0^\infty d\omega \sum_b \frac{(E_a - E_b) |\vec{p}_{ba}|^2}{E_a - E_b - \omega}$$

Dieser Ausdruck ist immer noch divergent aber nur noch logarithmisch. Führt man einen cut-off $\omega_{\text{max}} = E_{\text{max}}$ ein ergibt sich

$$\begin{aligned} \underline{\omega_0 > 0} \quad \rho \int_0^{E_{\text{max}}} d\omega \frac{1}{\omega_0 - \omega} &= \int_0^{\omega_0 - \varepsilon} d\omega \frac{1}{\omega_0 - \omega} + \int_{\omega_0 + \varepsilon}^{E_{\text{max}}} d\omega \frac{1}{\omega_0 - \omega} \\ &= -\ln(\omega_0 - \omega) \Big|_0^{\omega_0 - \varepsilon} - \ln(\omega_0 - \omega) \Big|_{\omega_0 + \varepsilon}^{E_{\text{max}}} \\ &= -\ln \frac{\varepsilon}{\omega_0} - \ln \frac{E_{\text{max}} - \omega_0}{\varepsilon} \simeq -\ln \frac{E_{\text{max}}}{\omega_0} \end{aligned}$$

wobei $E_{\text{max}} \gg \omega_0$ benutzt wurde

$$\underline{\omega_0 < 0} \quad \rho \int_0^{E_{\text{max}}} d\omega \frac{1}{\omega_0 - \omega} = \int_0^{E_{\text{max}}} d\omega \frac{1}{\omega_0 - \omega} = -\ln \left(\frac{E_{\text{max}}}{|\omega_0|} \right)$$

$$\Delta E_a^{\text{obs}} = -\frac{e^2}{4\pi} \frac{2}{3\pi} \frac{1}{m^2} \sum_b (E_a - E_b) \ln \frac{E_{\text{max}}}{|E_a - E_b|} |\vec{p}_{ba}|^2$$

Da der Logarithmus nur langsam veränderlich mit $|E_a - E_b|$ ist kann man ihn näherungsweise aus der Summe ziehen

$$\Delta E_a^{\text{obs}} \simeq -\frac{e^2}{4\pi} \frac{2}{3\pi} \frac{1}{m^2} \ln \frac{E_{\text{max}}}{\langle |E_a - E_b| \rangle} \sum_b (E_a - E_b) |\vec{p}_{ba}|^2$$

Die Summe $\sum_b$ kann explizit ausgewertet werden

$$\sum_b (E_a - E_b) |\vec{p}_{ba}|^2 = \sum_a \langle a | \hat{H}_A \hat{p}^i - \hat{p}^i \hat{H}_A | b \rangle \cdot \langle b | \hat{p}^i | a \rangle$$

$$= - \sum_a \langle a | \hat{p}^i | b \rangle \langle b | \hat{H}_A \hat{p}^i - \hat{p}^i \hat{H}_A | a \rangle$$

$$= \frac{1}{2} \langle a | [[\hat{H}_A, \hat{p}^i], \hat{p}^i] | a \rangle \quad \text{Summenkonvention bzgl. } i$$

Für ein Zentralfeld $V(\vec{r}) = -Z \frac{e^2}{4\pi r}$ findet man

$$[[\hat{H}_A, \hat{p}^i], \hat{p}^i] = [i \partial_j V, -i \partial_j] = -\nabla^2 V$$

$$= -Ze^2 \delta^{(3)}(\vec{r})$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta E_a^{\text{obs}} = Z \alpha^2 \left(\frac{4}{3m^2} \right) |\psi_a(r=0)|^2 \ln \left[\frac{E_{\text{max}}}{\langle |E_a - E_b| \rangle} \right]}$$

mit $\alpha = \frac{e^2}{4\pi} \simeq \frac{1}{137}$ Feinstrukturkonstante

Bemerkungen:

- $\Delta E \neq 0$ nur für Zustände mit $\psi_a(r=0) \neq 0$
 $\rightarrow$ s-Zustände (Für p-Zustände andere viel kleinere Beiträge wichtig)

- $E_{\max} > \langle |E_a - E_b| \rangle \leadsto \text{d.h. } \Delta E_a^{\text{obs}} > 0$

- Mittelwert $\langle |E_a - E_b| \rangle$ schwierig zu berechnen

$$\langle |E_a - E_b| \rangle_{2s} \simeq 226.3 \text{ eV}$$

mit $E_{\max} \stackrel{!}{=} m \Rightarrow \ln \frac{m}{\langle |E_a - E_b| \rangle_{2s}} \simeq 7.72$

- Wasserstoff $Z=1$

$$|\psi_{2s}(r=0)|^2 = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{(2a_0)^3} \left(2 - \frac{r}{a_0}\right)^2 e^{-r/a_0} \Big|_{r=0}$$

$$\Rightarrow \Delta E_{2s_{1/2} - 2p_{1/2}} = m \alpha^5 \frac{7.72}{6\pi} \simeq 1051 \text{ MHz}$$

Experiment	1057845(9) kHz	(1986)
Theorie (volle QED)	1057857(14) kHz	(1984)

$\Rightarrow$ QED ist extrem erfolgreich!

~~Exp. (Hänisch)~~