

II. kanonische Quantisierung von Feldern

II.1 die quantisierte eindimensionale harmonische Kette

$$L = \sum_{i=0}^{N-1} \left(\frac{m}{2} \dot{q}_i^2 - \frac{k}{2} (q_{i+1} - q_i)^2 \right)$$

kontinuierliches

$$L = \frac{1}{2} \int_0^L dz \left[\frac{1}{v^2} \left(\frac{\partial q(z,t)}{\partial t} \right)^2 - \left(\frac{\partial q(z,t)}{\partial z} \right)^2 \right]$$

Lagrangegleichungen

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 q}{\partial z^2} = 0 \quad \text{mit } v^2 \equiv \frac{\hbar}{\mu}$$

Lösungen für periodische Randbedingungen

$$q(z,t) \sim e^{\pm i(k_n z - \omega_n t)}$$

$$\text{mit } k_n = \frac{2\pi}{L} n \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\text{und } \omega_n^2 = v^2 k_n^2$$

komplexwertige, normierte Eigenlösungen $\omega_n = v|k_n|$

$$\phi_n(z,t) = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{i(k_n z - \omega_n t)}$$

Orthogonalitätsrelation

$$\int_0^L dz \phi_n^*(z,t) \phi_m(z,t) = \delta_{nm}$$

Zerlegung von $q(z,t)$ in Eigenlösungen

$$q(z,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \left(a_n(t) \phi_n(z,t) + a_n^*(t) \phi_n^*(z,t) \right)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{c_n}{\sqrt{L}} \left(a_n(t) e^{i k_n z} + a_n^*(t) e^{-i k_n z} \right)$$

wobei

$$a_n(t) = a_n(0) e^{-i \omega_n t}$$

Substitution in Lagrangegleichung zeigt

$$\ddot{a}_n(t) + \omega_n^2 a_n(t) = 0 \quad \Rightarrow \text{harm. Oszillator}$$

Hamiltonfunktion $\dots \rightarrow$

$$H = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n^2 \frac{2\omega_n^2}{v^2} a_n^*(t) a_n(t)$$

$$\Rightarrow \text{Wahl } c_n = \sqrt{\frac{v^2}{2\omega_n}} = \frac{v}{\sqrt{2\omega_n}}$$

$$H = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \omega_n a_n^*(t) a_n(t)$$

Hamiltonfunktion ist identisch zu einer Summe harmonischer Oszillatoren mit Frequenzen

$$\omega_n = \frac{2\pi v}{L} |n|$$

Nun wollen wir die lineare Kette quantisieren indem wir von der Darstellung der Hamiltonfunktion als Summe harmonischer Oszillatoren (Normalmoden) ausgehen.

$$x_n(t) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\omega_n}} (a_n(t) + a_n^*(t))$$

$$p_n(t) \equiv -i \sqrt{\frac{\omega_n}{2}} (a_n(t) - a_n^*(t))$$

$\Rightarrow$

$$H = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} [p_n^2(t) + \omega_n^2 x_n^2]$$

Quantisierung des harmonischen Oszillators

$$\{x_n, x_m\}_P = \{p_n, p_m\}_P = 0 \quad \{x_n, p_m\}_P = \delta_{nm}$$

$$\hookrightarrow [\hat{x}_n, \hat{x}_m] = [\hat{p}_n, \hat{p}_m] = 0 \quad [\hat{x}_n, \hat{p}_m] = i\delta_{nm}$$

äquivalent dazu sind

$$[\hat{a}_n, \hat{a}_m] = [\hat{a}_n^+, \hat{a}_m^+] = 0$$

$$[\hat{a}_n, \hat{a}_m^+] = \delta_{nm}$$

und der Hamiltonoperator wird

$$\hat{H} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \omega_n \left[\hat{a}_n^+ \hat{a}_n + \frac{1}{2} \right]$$

Der Term $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \omega_n/2$ gibt einen divergenten Beitrag der aber irrelevant ist und durch undefinition des Energie nullpunktes beseitigt werden kann

$$\hat{H} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \omega_n \hat{a}_n^+ \hat{a}_n$$

Die so durchgeführte Quantisierung ist äquivalent zur Forderung

$$\begin{aligned} [\hat{q}(z,t), \hat{q}(z',t)] &= [\hat{\pi}(z,t), \hat{\pi}(z',t)] = 0 \\ [\hat{q}(z,t), \hat{\pi}(z',t)] &= i \delta(z-z') \quad \text{auf } [0,L] \end{aligned}$$

Bew.:

$$\pi(z,t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}(z,t)} = \frac{1}{v} \dot{q}(z,t)$$

$$= \frac{1}{v} \sum_n \frac{1}{\sqrt{2\omega_n L}} \left(-i\omega_n a_n(t) e^{ik_n z} + i\omega_n a_n^*(t) e^{-ik_n z} \right)$$

$$[\hat{q}(z', t), \hat{\pi}(z, t)] = \frac{i}{2L} \sum_{n, m} \sqrt{\frac{\omega_n}{\omega_m}}$$

$$\left\{ [\hat{a}_n, \hat{a}_m^\dagger] e^{i(k_n z - k_m z')} e^{-i(\omega_n - \omega_m)t} - [\hat{a}_n^\dagger, \hat{a}_m] e^{-i(k_n z - k_m z')} e^{i(\omega_n - \omega_m)t} \right\}$$

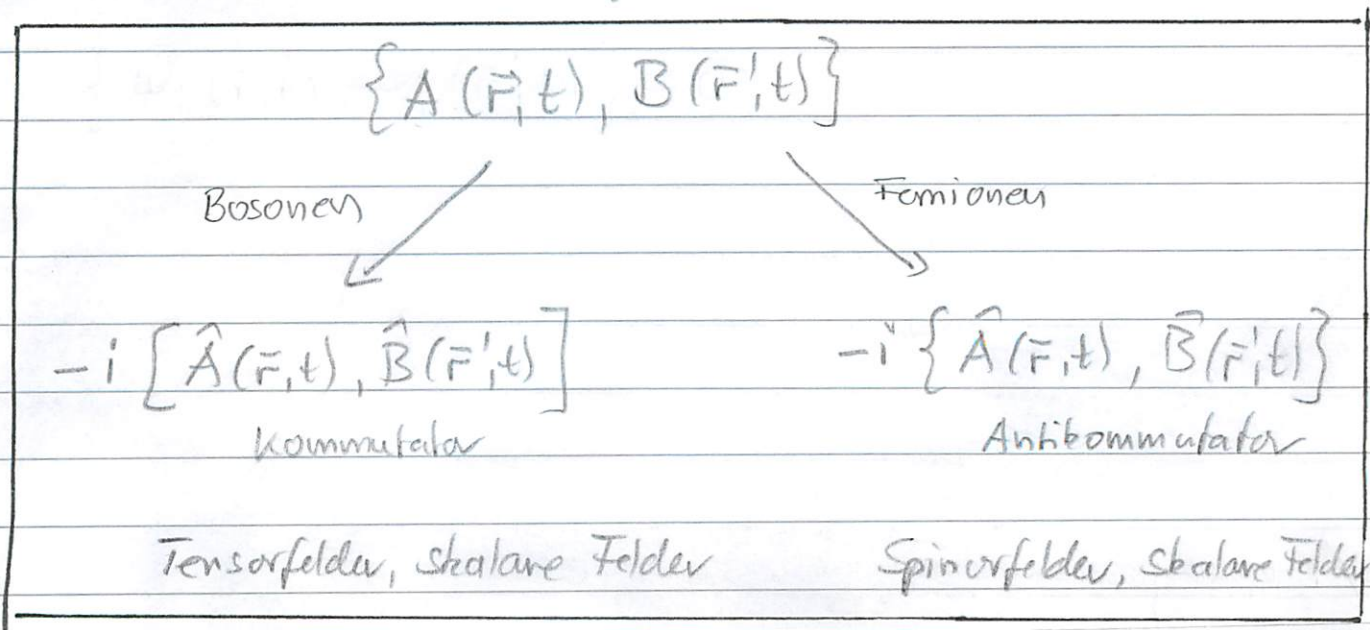
$$= + \frac{i}{L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{ik_n(z-z')} = \delta(z-z')$$

auf $[0, L)$ $\square$

Das eben gefundene werden wir jetzt verallgemeinern:

II.2 fundamentale Vertauschungsregeln

kanonische Quantisierung der Felder



(i) phys. Zustand eines Feldes wird durch einen Vektor $|\Phi\rangle$ in einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ (bzw. dessen Verallgemeinerung) beschrieben

(ii) die Felder sind lineare Operatoren in $\mathcal{H}$

(iii) Observable sind selbstadjungierte Operatoren.

Bem: komplexwertigen Feldern wie dem Diracfeld entsprechen keine hermiteschen Operatoren, d.h. sie selber sind keine Observable

(iv) Bei einer Messung einer Observable wird der Zustand auf einen Eigenraum projiziert der dem Meßwert entspricht

(v) Die Dynamik wird durch den Hamiltonoperator beschrieben (Heisenbergbild)

$$\frac{\partial}{\partial t} \phi(\vec{r}, t) = [\phi(\vec{r}, t), H]_P$$

↓

$$\boxed{i \frac{\partial}{\partial t} \hat{\phi}(\vec{r}, t) = [\hat{\phi}(\vec{r}, t), \hat{H}]}$$

damit $\hat{\phi}(\vec{r}, t) = e^{i\hat{H}t} \hat{\phi}(\vec{r}, 0) e^{-i\hat{H}t}$

d.h. unitäre Transformation $\hat{U}(t) = e^{i\hat{H}t}$

II.3 Quantisierung des nichtrelativistischen Schrödingerfeldes und Zshg. zur Vielteilchenquantenmechanik

klassische Lagrange-dichte

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \psi^* i \overrightarrow{\partial}_t \psi - \frac{1}{2} \psi^* i \overleftarrow{\partial}_t \psi - \frac{1}{2m} \vec{\nabla} \psi^* \vec{\nabla} \psi$$

Euler-Lagrange = Schrödingergleichung

$$i \partial_t \psi = - \frac{1}{2m} \vec{\nabla}^2 \psi$$

kanonische Impulse

$$\pi^* \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t \psi)} = \frac{i}{2} \psi^*$$

$$\pi \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t \psi^*)} = -\frac{i}{2} \psi$$

Problem: Felder ψ, ψ^* sind zu sich selbst konjugiert und damit nicht völlig unabhängig von π^* und π

korrekte Quantisierung (Bosonen)

$$[\hat{\psi}(\vec{r}, t), \hat{\psi}(\vec{r}', t)] = [\hat{\psi}^+(\vec{r}, t), \hat{\psi}^+(\vec{r}', t)] = 0$$

$$[\hat{\psi}(\vec{r}, t), \hat{\psi}^+(\vec{r}', t)] = \delta(\vec{r} - \vec{r}')$$

Hamiltonoperator

$$\hat{H} = \int d^3\vec{r} \, \hat{\psi}^\dagger(\vec{r}, t) \left(-\frac{1}{2m} \vec{\nabla}^2 \right) \hat{\psi}(\vec{r}, t)$$

man findet

$$\begin{aligned} [\hat{\psi}(\vec{r}, t), \hat{H}(t)] &= \\ &= \int d^3\vec{r}' \underbrace{[\hat{\psi}(\vec{r}, t), \hat{\psi}^\dagger(\vec{r}', t)]}_{\delta(\vec{r}, \vec{r}')} \left(-\frac{1}{2m} \vec{\nabla}'^2 \right) \hat{\psi}(\vec{r}', t) \\ &= -\frac{1}{2m} \vec{\nabla}^2 \hat{\psi}(\vec{r}, t) \end{aligned}$$

und damit aus

$$i \partial_t \hat{\psi}(\vec{r}, t) = [\hat{\psi}(\vec{r}, t), \hat{H}] = -\frac{1}{2m} \vec{\nabla}^2 \hat{\psi}(\vec{r}, t)$$

die korrekte Schrödingergleichung für den Feldoperator.

Interessanterweise ergibt sich die Schrödingergleichung auch für den Fall einer fermionischen Quantisierung

$$\begin{aligned} \{\hat{\psi}(\vec{r}, t), \hat{\psi}(\vec{r}', t)\} &= \{\hat{\psi}^\dagger(\vec{r}, t), \hat{\psi}^\dagger(\vec{r}', t)\} = 0 \\ \{\hat{\psi}(\vec{r}, t), \hat{\psi}^\dagger(\vec{r}', t)\} &= \delta(\vec{r} - \vec{r}') \end{aligned}$$

Bew.: $[\hat{\psi}(\vec{r}), \hat{H}] =$

$$\int d^3\vec{r}' \underbrace{\hat{\psi}(\vec{r}) \hat{\psi}^\dagger(\vec{r}')}_{= \delta(\vec{r}-\vec{r}')} \left(-\frac{1}{2m} \vec{\nabla}'^2\right) \hat{\psi}(\vec{r}') \\ = \delta(\vec{r}-\vec{r}') - \hat{\psi}^\dagger(\vec{r}') \hat{\psi}(\vec{r})$$

$$+ \int d^3\vec{r}' \hat{\psi}^\dagger(\vec{r}') \left(-\frac{1}{2m} \vec{\nabla}'^2\right) \underbrace{\hat{\psi}(\vec{r}') \hat{\psi}^\dagger(\vec{r})}_{= -\hat{\psi}(\vec{r}) \hat{\psi}^\dagger(\vec{r}')} \\ = -\hat{\psi}(\vec{r}) \hat{\psi}^\dagger(\vec{r}') \left(-\frac{1}{2m} \vec{\nabla}'^2\right)$$

$$= \int d^3\vec{r}' \delta(\vec{r}-\vec{r}') \left(-\frac{1}{2m} \vec{\nabla}'^2\right) \hat{\psi}(\vec{r}')$$

$$= -\frac{1}{2m} \vec{\nabla}^2 \hat{\psi}(\vec{r}) \quad \square$$

⇒ Das Schrödingerfeld (skalares Feld!) kann sowohl nach der bosonischen als auch nach der fermionischen Quantisierungsregel quantisiert werden!

Wir wollen jetzt versuchen analog zur linearen Kette eine Zerlegung nach Normalmoden einzuführen.

Nehmen wir periodische R.B. an, findet man die normierten Eigenlösungen

$$\phi_n(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{L^3}} e^{i(\vec{k}_n \cdot \vec{r} - \omega_n t)}$$

wobei $\vec{k}_n = \frac{2\pi}{L} (n_x, n_y, n_z)$ und $\omega_n = k_n^2 / 2m$

und $n_x, n_y, n_z = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Zerlegung des Feldoperators nach ϕ_n liefert

$$\hat{\psi}(\vec{r}, t) = \sum_n \hat{a}_n e^{-i\omega_n t} \phi_n(\vec{r})$$

im bosonischen Fall mit

$$[\hat{a}_n, \hat{a}_m] = [\hat{a}_n^+, \hat{a}_m^+] = 0$$

$$[\hat{a}_n, \hat{a}_m^+] = \delta_{nm}$$

bzw.

$$\hat{\psi}(\vec{r}, t) = \sum_n \hat{c}_n e^{-i\omega_n t} \phi_n(\vec{r})$$

im fermionischen Fall mit

$$\{\hat{c}_n, \hat{c}_m\} = \{\hat{c}_n^+, \hat{c}_m^+\} = 0$$

$$\{\hat{c}_n, \hat{c}_m^+\} = \delta_{nm}$$

Der Hamiltonoperator ergibt sich zu

$$\hat{H} = \int d^3\vec{r} \hat{\psi}^\dagger(\vec{r}, t) \left(-\frac{1}{2m} \Delta \right) \hat{\psi}(\vec{r}, t)$$

$$= \int d^3\vec{r} \hat{\psi}^\dagger(\vec{r}, t) i \partial_t \hat{\psi}(\vec{r}, t)$$

$$= \int d^3\vec{r} \sum_n \hat{a}_n^\dagger e^{i\omega_n t} \phi_n^*(\vec{r}) + \dots$$

$$+ \sum_m \hat{a}_m \omega_m e^{-i\omega_m t} \phi_m(\vec{r})$$

mit der Orthogonalitätsrelation

$$\int d^3\vec{r} \phi_n^*(\vec{r}) \phi_m(\vec{r}) = \delta_{nm}$$

folgt

$$\hat{H} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \omega_n \hat{a}_n^\dagger \hat{a}_n$$

bzw. $\hat{C}_n^\dagger \hat{C}_n$ im fermionischen Fall. In beiden Fällen ist $\hat{H}$ positiv (semi) definit.

Die Eigenzustände von $\hat{H}$ haben die Struktur

$$|\dots, m_{j-1}, m_j, m_{j+1}, \dots\rangle$$

wobei für den Fall $m_{j-1} = m_{j+1} = \dots = 0$

• bosonischer Vertauschungsregeln $m_k = 0, 1, 2, 3, \dots$

(ii) • fermionischer Vertauschungsregeln $m_k = 0, 1$

gilt. Die m_n sind die Eigenwerte der Anzahloperatoren

$$\hat{a}_m^\dagger \hat{a}_m \text{ bzw. } \hat{C}_m^\dagger \hat{C}_m$$

und können als Teilchenzahlen in der Mode ϕ_n interpretiert werden. Der Zustand $|0, 0, 0, \dots\rangle$ wird als Teilchenvakuum bezeichnet

$\hat{a}_n^+$	Teilchenerzeuger in Mode ϕ_n
$\hat{a}_n$	Teilchenvernichter in Mode ϕ_n

Die Antivertauschungsregel $\{\hat{c}_n^+, \hat{c}_n^+\} = 0$ repräsentiert das Pauliprinzip

$$(\hat{c}_n^+)^2 = 0$$

$\nexists$ 2 Fermionen im selben Zustand.

Siehe
← 629

Eine Beziehung zwischen dem quantisierten Schrödingerfeld und der nichtrelativistischen Vielteilchenquantenmechanik kann durch folgende Relationen hergestellt werden:

N-Teilchenwellenfunktion

$$\phi(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t) \equiv \langle 0 | \hat{\Psi}(\vec{r}_1, t) \dots \hat{\Psi}(\vec{r}_N, t) | \phi \rangle$$

man sieht sofort, daß bosonische Vertauschungsregeln für $\hat{\Psi}(\vec{r}, t)$ eine symmetrische Wellenfunktion zur Folge haben und daß fermionische Vertauschungsregeln zu vollständig antisymmetrischen Wellenfunktionen führen:

Operator der Gesamtteilchenzahl des Schrödingerfeldes

$$\begin{aligned}\hat{N} &= \int d^3\vec{r} \hat{\psi}^\dagger \hat{\psi} \\ &= \int d^3\vec{r} \sum_{n,m} \hat{a}_n^\dagger(t) \hat{a}_m(t) \underbrace{\phi_n^*(\vec{r}) \phi_m(\vec{r})}_{\delta_{nm}} \\ &= \sum_n \hat{a}_n^\dagger \hat{a}_n\end{aligned}$$

Man erkennt, daß $\hat{N}$ ein Erhaltungsgröße in der Schrödingertheorie ist

$$i \frac{d}{dt} \hat{N} = [\hat{N}, \hat{H}] = 0$$

$$= \int d^3r \int d^3r' \underbrace{\hat{\psi}^\dagger(\vec{r}) \hat{\psi}(\vec{r}) \hat{\psi}^\dagger(\vec{r}') \left(-\frac{1}{2m} \Delta + V(\vec{r}') \right) \hat{\psi}(\vec{r}')}_{\text{Term 1}}$$

$$- \int d^3r \int d^3r' \hat{\psi}^\dagger(\vec{r}') \left(-\frac{1}{2m} \Delta + V(\vec{r}') \right) \underbrace{\hat{\psi}(\vec{r}') \hat{\psi}^\dagger(\vec{r}) \hat{\psi}(\vec{r})}_{\text{Term 2}}$$

$$\Rightarrow = \hat{\psi}^\dagger(\vec{r}) \hat{\psi}(\vec{r}) \hat{\psi}(\vec{r}') + \delta(\vec{r}-\vec{r}') \hat{\psi}(\vec{r}')$$

für Bosonen oder Fermionen

$$= \hat{\psi}^\dagger(\vec{r}') \hat{\psi}^\dagger(\vec{r}) \hat{\psi}(\vec{r}) + \delta(\vec{r}-\vec{r}') \hat{\psi}(\vec{r}')$$

$$= 0$$

$$= 0$$

Superauswahlregel der nichtrelativistischen Quantenfeldtheorie: Die Anzahl der Teilchen kann nicht erhöht oder erniedrigt werden

$$[\hat{\psi}(\vec{r}_i), \hat{\psi}(\vec{r}_n)] = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\phi(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_i, \dots, \vec{r}_n, \dots) = \phi(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n, \dots, \vec{r}_i, \dots)$$

$$\{\hat{\psi}(\vec{r}_i), \hat{\psi}(\vec{r}_n)\} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\phi(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_i, \dots, \vec{r}_n, \dots) = -\phi(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n, \dots, \vec{r}_i, \dots)$$

Einfeldoperatoren

$$\hat{O} \equiv \int d^3\vec{r} \hat{\psi}^\dagger(\vec{r}, t) \hat{O}_D \hat{\psi}(\vec{r}, t)$$

wobei $\hat{O}_D$ der zu $\hat{O}$ gehörige Differentialoperator in Ortsdarstellung bedeutet.

Bsp.

$$\hat{\vec{r}} = \int d^3\vec{r} \hat{\psi}^\dagger(\vec{r}, t) \vec{r} \hat{\psi}(\vec{r}, t)$$

$$\hat{\vec{p}} = \int d^3\vec{r} \hat{\psi}^\dagger(\vec{r}, t) (-i\vec{\nabla}) \hat{\psi}(\vec{r}, t)$$

Ü.A.:

Man zeige, daß $[\hat{\vec{r}}, \hat{\vec{p}}] = i \int d^3\vec{r} \hat{\psi}^\dagger \hat{\psi}$ unabhängig davon ob $\hat{\psi}$ ein bosonisches oder fermionisches Feld ist.

II.4. Das geklebene Klein-Gordon Feld

Als einfachstes relativistisches Feld betrachten wir das geladene Klein-Gordon-Feld. Für eine von Null verschiedene Stromdichte muß das Klein-Gordon-Feld komplex sein.

$$\mathcal{L} = \frac{\partial \phi^*}{\partial x^\mu} \frac{\partial \phi}{\partial x_\mu} - m^2 \phi^* \phi$$

• konjugierte Impulse

$$\pi^* = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi)} = \partial_0 \phi^* = \partial_t \phi^* \quad \pi = \partial_t \phi$$

$$\Rightarrow \mathcal{H} = \pi^* \partial_0 \phi + \partial_0 \phi^* \pi - \mathcal{L}$$

$$= \pi^* \pi + \vec{\nabla} \phi^* \vec{\nabla} \phi + m^2 \phi^* \phi$$

• Hamiltonoperator

$$\hat{H} = \int d^3r \left(\vec{\pi}^\dagger \vec{\pi} + \vec{\nabla} \hat{\phi}^\dagger \vec{\nabla} \hat{\phi} + m^2 \hat{\phi}^\dagger \hat{\phi} \right)$$

Wir werden jetzt zeigen, daß für das Klein-Gordon-Feld, d.h. ein Spin-0-Feld nur Kommutator-Vertauschungsregeln in Frage kommen. Dazu betrachten wir zunächst die Lösungen der freien KG-Gleichung

$$(\square + m^2) \phi = 0$$

$$\phi_n^{(\pm)}(\vec{r}, t) = N e^{i(\vec{k}_n \vec{r} \mp E_n t)} \quad \begin{array}{l} + \text{ positiv} \\ - \text{ negativ} \\ \text{Energie/Ladung} \end{array}$$

wobei $E_n = \sqrt{m^2 + k_n^2}$ ist. Wählt man periodische Randbedingungen in einem Volumen L^3 gilt $\vec{k}_n = \frac{2\pi}{L}(n_x, n_y, n_z)$ mit $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Ansatz

$$\hat{\phi}(\vec{r}, t) = \sum_n \left(\hat{a}_n \phi_n^{(+)}(\vec{r}) + \hat{c}_n^\dagger \phi_{-n}^{(-)}(\vec{r}) \right)$$

$$\hat{\phi}^\dagger(\vec{r}, t) = \sum_n \left(\hat{a}_n^\dagger \phi_n^{(+)*}(\vec{r}) + \hat{c}_n \phi_{-n}^{(-)*}(\vec{r}) \right)$$

Interpretation

$\hat{a}_n$ vernichtet Teilchen mit Impuls p_n und positive Ladung

$\hat{c}_n^\dagger$ erzeugt - " - und negativer Ladung

Bem: (i) $\hat{a}_n$ mit $\hat{c}_n^\dagger$ verknüpft damit $\hat{\phi}$ (positive) Ladung erniedrigt

(ii) $\hat{c}_n^\dagger$ mit $\phi_{-n}^{(-)}$ verknüpft der Zustände negativer Energie und Impuls $\vec{p}$ Antiteilchen mit Impuls $-\vec{p}$ entsprechen

Es gelten die folgenden Orthogonalitätsrelationen

$$i \int_{L^3} d^3\vec{r} \phi_n^{(+)*} \overset{\leftrightarrow}{\frac{\partial}{\partial t}} \phi_m^{(+)} = 2\delta_{nm} N^2 L^3 E_n$$

$$\Rightarrow N = \frac{1}{\sqrt{2E_n L^3}}$$

$$i \int d^3 \vec{r} \phi_n^{(-)*} \overset{\leftrightarrow}{\frac{\partial}{\partial t}} \phi_m^{(-)} = -2 \delta_{nm} N^2 L^3 E_n = -\delta_{nm}$$

$$i \int d^3 \vec{r} \phi_n^{(-)*} \overset{\leftrightarrow}{\frac{\partial}{\partial t}} \phi_m^{(+)} = 0$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \hat{H} &= \int d^3 \vec{r} \left(\partial_t \hat{\phi}^* \partial_t \hat{\phi} + \vec{\nabla} \hat{\phi}^* \vec{\nabla} \hat{\phi} + m^2 \hat{\phi}^* \hat{\phi} \right) \\ &\stackrel{\text{part. Int.}}{=} \int d^3 \vec{r} \left(\partial_t \hat{\phi}^* \partial_t \hat{\phi} - \hat{\phi}^* \underbrace{(\vec{\nabla}^2 \hat{\phi} - m^2 \hat{\phi})}_{\partial_t^2 \hat{\phi}} \right) \\ &= - \int d^3 \vec{r} \hat{\phi}^* \overset{\leftrightarrow}{\frac{\partial}{\partial t}} \left(\frac{\partial \hat{\phi}}{\partial t} \right) \end{aligned}$$

Einsetzen der Modulerlegung liefert:

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \int d^3 \vec{r} \sum_n \left(\hat{a}_n^+ \phi_n^{(+)*} + \hat{c}_n \phi_{-n}^{(-)*} \right) \\ &\quad i \overset{\leftrightarrow}{\frac{\partial}{\partial t}} \sum_m E_m \left(\hat{a}_m \phi_m^{(+)} - \hat{c}_m^+ \phi_{-m}^{(-)} \right) \\ &= \sum_n E_n \left(\hat{a}_n^+ \hat{a}_n + \hat{c}_n \hat{c}_n^+ \right) \end{aligned}$$

Kommutatorvertauschungsregeln

$$\Rightarrow \hat{H} = \underbrace{\sum_n E_n \left(\hat{a}_n^+ \hat{a}_n + \hat{c}_n^+ \hat{c}_n \right)}_{\text{positiv definit } \textcircled{😊}} + \sum_n E_n$$

Antikommutatorvertauschungsregeln

$$\Rightarrow \hat{H} = \sum_n E_n \underbrace{(\hat{a}_n^\dagger \hat{a}_n - \hat{c}_n^\dagger \hat{c}_n)}_{\text{nicht positiv definit}} + \sum_n E_n$$

↯ nicht positiv definit ☹

$$\Rightarrow \boxed{\text{Spin } 0 \Rightarrow \text{Bosonen}}$$

$$(*) \quad \boxed{\begin{aligned} [\hat{\phi}(\vec{r}, t), \hat{\phi}(\vec{r}', t)] &= [\hat{\phi}^\dagger(\vec{r}, t), \hat{\phi}^\dagger(\vec{r}', t)] = 0 \\ [\hat{\pi}(\vec{r}, t), \hat{\pi}(\vec{r}', t)] &= [\hat{\pi}^\dagger(\vec{r}, t), \hat{\pi}^\dagger(\vec{r}', t)] = 0 \\ [\hat{\phi}(\vec{r}, t), \hat{\pi}(\vec{r}', t)] &= [\hat{\phi}^\dagger(\vec{r}, t), \hat{\pi}^\dagger(\vec{r}', t)] = i\delta(\vec{r} - \vec{r}') \end{aligned}}$$

$$[\hat{\phi}(\vec{r}, t), \hat{\pi}(\vec{r}', t)] = \sum_{n, m} \left[(\hat{a}_n \phi_n^{(+)}(\vec{r}) + \hat{c}_n^\dagger \phi_{-n}^{(-)}(\vec{r})) \right],$$

$$iE_m (\hat{a}_m^\dagger \phi_m^{(+)*}(\vec{r}') - \hat{c}_m \phi_{-m}^{(-)*}(\vec{r}'))]$$

$$= \sum_{n, m} [\hat{a}_n, \hat{a}_m^\dagger] iE_m \phi_n^{(+)}(\vec{r}) \phi_m^{(+)*}(\vec{r}')$$

$$- \sum_{n, m} [\hat{c}_n^\dagger, \hat{c}_m] iE_m \phi_{-n}^{(-)}(\vec{r}) \phi_{-m}^{(-)*}(\vec{r}')$$

$$+ \sum_{n, m} [\hat{c}_n^\dagger, \hat{a}_m^\dagger] iE_m \phi_{-n}^{(-)}(\vec{r}) \phi_m^{(+)*}(\vec{r}')$$

$$- \sum_{n, m} [\hat{a}_n, \hat{c}_m] iE_m \phi_n^{(+)}(\vec{r}) \phi_{-m}^{(-)*}(\vec{r}')$$

$\Rightarrow$

$$[\hat{a}_n, \hat{a}_m^\dagger] = \delta_{nm} \quad [\hat{c}_n, \hat{c}_m^\dagger] = \delta_{nm}$$

$$[\hat{a}_n, \hat{c}_m] = 0$$

da

$$\sum_n E_n \phi_n^{(+)*}(\vec{r}) \phi_n^{(+)}(\vec{r}') = \frac{1}{2} \delta(\vec{r} - \vec{r}') \text{ auf } L$$

$$\sum_n E_n \phi_{-n}^{(-)*}(\vec{r}) \phi_{-n}^{(-)}(\vec{r}') = \frac{1}{2} \delta(\vec{r} - \vec{r}') \text{ auf } L$$

Wir haben hier bereits eine wichtige Aussage der Quantentheorie relativistischer Felder kennengelernt

Spin-Statistik Theorem

Felder mit ganzzahligem Spin $\Leftrightarrow$ Bosonen

Felder mit halbzahligem Spin $\Leftrightarrow$ Fermionen

Vertauschungsregeln und Kausalität

Die Vertauschungsregeln des Klein-Gordon Feldes

$$[\hat{\phi}(\vec{r}, t), \hat{\pi}(\vec{r}', t)] = [\hat{\phi}^\dagger(\vec{r}, t), \hat{\pi}^\dagger(\vec{r}', t)] = i \delta(\vec{r} - \vec{r}')$$

bedeuten, daß lokale Observablen in den Feldern zur selben Zeit an verschiedenen Orten gleichzeitig meßbar sind, d.h.

eine Messung der Felder bei $(\vec{r}, t)$ kann keinen Einfluß auf eine Messung der Felder bei $(\vec{r}', t)$ haben mit $\vec{r} \neq \vec{r}'$.

Da die Theorie Lorentzinvariant ist und die Lorentztransformation

$$(\vec{r} - \vec{r}')^2 - (t - t')^2 = (x - x')^2$$

invariant läßt, gilt für relativistische Quantenfelder

Messungen der Felder bzw. lokalen Observablen die sich aus den Feldern ergeben an raumartig getrennten Raum-Zeit Punkten können einander nicht beeinflussen

Mikrokausalität

Maxwellfeld

Es sind die Hamiltonoperator des freien Coulombfeldes

$$\frac{1}{2} (\vec{E}_\perp^2 - \vec{B}_\perp^2)$$

$$H = \int d^3x \mathcal{H} = \frac{1}{2} \int d^3x (\vec{E}_\perp^2 + \vec{B}_\perp^2)$$

Die fundamentalen Felder sind

$$-E, \frac{\partial A}{\partial t}$$

$$\hat{\vec{A}}_{\perp}$$

$$\hat{\vec{B}}_{\perp} = \frac{\partial \hat{\vec{A}}_{\perp}}{\partial t} = -\hat{\vec{E}}_{\perp}$$

Es gilt

$$\vec{\nabla} \cdot \hat{\vec{A}}_{\perp} = 0$$

Coulomb-Eichung

Aufgrund der Coulomb-Eichung sind die Vektorcomponenten von $\hat{\vec{A}}_{\perp}$ und $\hat{\vec{E}}_{\perp}$ nicht unabhängig. Damit muß für die fundamentalen Vertauschungsregeln

$$(*) \quad \boxed{[\hat{\vec{A}}_{\perp}(\vec{r}, t), \hat{\vec{E}}_{\perp}(\vec{r}', t)] = -i \vec{\delta}_{\perp}^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}')} \quad \leftarrow$$

gewählt werden. Wir werden sehen, daß die Wahl von Antikommutatorregeln zu Unsinn führen würde.

Bem: (i) (*) ist konsistent mit der Coulomb Eichung

$$\vec{\nabla}_{\vec{r}} \cdot [\hat{\vec{A}}_{\perp}(\vec{r}, t), \hat{\vec{E}}_{\perp}(\vec{r}', t)] = -i \vec{\nabla}_{\vec{r}} \cdot \vec{\delta}_{\perp}^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}') = 0$$

(ii) Es gilt außerdem (Ü.A.)

$$\sum_{k=1}^3 [\hat{A}_{\perp}^k(\vec{r}', t), \hat{E}_{\perp}^k(\vec{r}, t)] = -2i \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}')$$

Anzahl der Freiheitsgrade

Betrachten Volumen L^3 mit periodischen Randbedingungen: (Bem.: Quantisierung in endlichen Volumen mit periodischen RB ist nicht Lorentzinvariant. D.h. um L-Invarianz zu garantieren muß der Übergang $L \rightarrow \infty$ betrachtet werden.)

$$\square \vec{A}(\vec{r}, t) = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r}, t) = 0$$

↑
nur 2 Freiheitsgrade

analog zur Quantisierung der linearen Kette mit $v=c=1$ und 2 Freiheitsgraden

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{n}} \sum_{\alpha=1}^2 \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{n}}L^3}} \left(\vec{e}_{\vec{n},\alpha} \hat{a}_{\vec{n},\alpha}^{(+)} e^{-i\vec{k}_{\vec{n}} \cdot \vec{r}} + \vec{e}_{\vec{n},\alpha}^* \hat{a}_{\vec{n},\alpha}^{(-)} e^{i\vec{k}_{\vec{n}} \cdot \vec{r}} \right)$$

wobei $\vec{n} = (n_x, n_y, n_z)$ mit $n_i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

und $\vec{k}_{\vec{n}} = (k_{n_x}, k_{n_y}, k_{n_z})$ mit $k_{n_i} = \frac{2\pi}{L} n_i$

und $\vec{k}_{\vec{n}} = (k_{n_x}, k_{n_y}, k_{n_z})$ mit $k_{n_i} = \frac{2\pi}{L} n_i$

Coulombgleichung

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$$

$\Rightarrow$

$$\vec{k}_{\vec{n}} \cdot \vec{e}_{\vec{n},\alpha} = 0$$

$\Rightarrow \vec{e}_{\vec{n},\alpha}$ transversale Polarisations-einheitsvektoren

Damit ergibt sich für den Hamiltonoperator

$$\hat{H} = \int d^3r \frac{1}{2} (\vec{E}_\perp^2 + \vec{B}_\perp^2) =$$

$$= \frac{1}{4L^3} \int d^3r \sum_{\substack{n,m \\ \alpha,\beta}} \frac{1}{\omega_n \omega_m} * \left\{ \right.$$

$$\left[\omega_n \omega_m \vec{e}_n^\alpha \cdot \vec{e}_m^\beta + (\vec{k}_n \times \vec{e}_n^\alpha) \cdot (\vec{k}_m \times \vec{e}_m^\beta) \right]$$

$$\cdot \left[\hat{a}_{n\alpha}^\dagger \hat{a}_{m\beta} e^{i(\vec{k}_n - \vec{k}_m) \cdot \vec{r}} + \hat{a}_{n\alpha} \hat{a}_{m\beta}^\dagger e^{-i(\vec{k}_n - \vec{k}_m) \cdot \vec{r}} \right]$$

$$= \left[\omega_n \omega_m \vec{e}_n^\alpha \cdot \vec{e}_m^\beta + (\vec{k}_n \times \vec{e}_n^\alpha) \cdot (\vec{k}_m \times \vec{e}_m^\beta) \right]$$

$$\cdot \left[\hat{a}_{n\alpha} \hat{a}_{m\beta} e^{-i(\vec{k}_n + \vec{k}_m) \cdot \vec{r}} + \hat{a}_{n\alpha}^\dagger \hat{a}_{m\beta}^\dagger e^{i(\vec{k}_n + \vec{k}_m) \cdot \vec{r}} \right]$$

mit Hilfe von

$$\frac{1}{L^3} \int_{L^3} d^3r e^{\pm i(\vec{k}_n - \vec{k}_m) \cdot \vec{r}} = \delta_{nm}$$

$$\frac{1}{L^3} \int_{L^3} d^3r e^{\pm i(\vec{k}_n + \vec{k}_m) \cdot \vec{r}} = \delta_{n,-m}$$

sowie $\vec{k}_n = -\vec{k}_{-n}$ findet man

$$\begin{aligned} \hat{H} = \frac{1}{4} \sum_{n,\alpha,\beta} \frac{1}{\omega_n} & \left\{ \left[\omega_n^2 \delta_{\alpha\beta} + (\vec{k}_n \times \vec{e}_n^\alpha) \cdot (\vec{k}_n \times \vec{e}_n^\beta) \right] (\hat{a}_{n\alpha}^\dagger \hat{a}_{n\beta} + \hat{a}_{n\alpha} \hat{a}_{n\beta}^\dagger) \right. \\ & \left. - \left[\omega_n^2 \vec{e}_n^\alpha \cdot \vec{e}_{-n}^\beta + (\vec{k}_n \times \vec{e}_n^\alpha) \cdot (\vec{k}_n \times \vec{e}_{-n}^\beta) \right] (\hat{a}_{n\alpha} \hat{a}_{-n\beta} + \hat{a}_{n\alpha}^\dagger \hat{a}_{-n\beta}^\dagger) \right\} \end{aligned}$$

Jetzt können wir ausnutzen

$$(\vec{k}_n \times \vec{e}_n^\alpha) \cdot (\vec{k}_n \times \vec{e}_{-n}^\beta) = k_n^2 \vec{e}_n^\alpha \cdot \vec{e}_{-n}^\beta - \underbrace{\vec{k}_n \cdot \vec{e}_{-n}^\beta \vec{k}_n \cdot \vec{e}_n^\alpha}_{=0}$$

$$= \omega_n^2 \vec{e}_n^\alpha \cdot \vec{e}_{-n}^\beta$$

$$(\vec{k}_n \times \vec{e}_n^\alpha) \cdot (\vec{k}_n \times \vec{e}_n^\beta) = k_n^2 \vec{e}_n^\alpha \cdot \vec{e}_n^\beta$$

$$= \omega_n^2 \delta_{\alpha\beta}$$

$\Rightarrow$

$$\hat{H} = \sum_{n,\alpha} \frac{1}{2} \omega_n [\hat{a}_{n\alpha}^\dagger \hat{a}_{n\alpha} + \hat{a}_{n\alpha} \hat{a}_{n\alpha}^\dagger]$$

Man erkennt deutlich, daß Antikommutatorregeln hier zu Unsinn geführt hätten, d.h. das elm. Feld muß als bosonisches Feld quantisiert werden.

$$\hat{H} = \sum_{n,\alpha} \omega_n \hat{a}_{n\alpha}^\dagger \hat{a}_{n\alpha} + \sum_{n,\alpha} \omega_n$$

Hamiltonoperator des freien elm. Feldes

In einer Übungsaufgabe soll gezeigt werden, daß der Impuls des Feldes gegeben ist durch

$$\vec{P} = \int d^3\vec{r} \vec{E}_\perp \times \vec{B}_\perp = \sum_{n,\alpha} \vec{k}_n \hat{a}_{n\alpha}^\dagger \hat{a}_{n\alpha} + \text{vak. term}$$

Etwas ausführlicher wollen wir den Drehimpuls des elm. Feldes diskutieren

Drehimpuls und Spin des elm. Feldes

Der Drehimpulsoperator des elm. Feldes kann analog zum klassischen Ausdruck definiert werden

$$\vec{\hat{J}} = \int d^3r \left[\vec{r} \times (\vec{\hat{E}}_{\perp} \times \vec{\hat{B}}_{\perp}) \right]$$

d.h.

$$\begin{aligned} \hat{J}^i &= \int d^3r \epsilon_{ije} r^j \underbrace{\epsilon_{ekm}} \hat{E}_k^e \underbrace{\epsilon_{mab}} \partial_a \hat{A}^b \\ &= \int d^3r \epsilon_{ije} r^j (\delta_{ea} \delta_{kb} - \delta_{eb} \delta_{ka}) \hat{E}_k^e \partial_a \hat{A}^b \\ &= \int d^3r \epsilon_{ije} r^j \left[\hat{E}_k^b \partial_e \hat{A}^b - (\vec{\hat{E}}_{\perp} \cdot \nabla) \hat{A}^e \right] \end{aligned}$$

Partielle Integration des letzten Terms mit $\vec{\nabla} \cdot \vec{\hat{E}}_{\perp} = 0$

$$\hat{J}^i = \int d^3r \epsilon_{ije} \left(r^j \hat{E}_k^b \partial_e \hat{A}^b + \hat{E}_k^j \hat{A}^e \right)$$

$$\boxed{\hat{J}^i = -i \int d^3r \hat{E}_k^b \left(L^i \hat{A}^b - i \epsilon_{ibe} \hat{A}^e \right)}$$

wobei

$$L = -i (\vec{r} \times \vec{\nabla})$$

der Operator des Bahndrehimpulses ist

$\Rightarrow$ Der Drehimpuls des elm. Feldes läßt sich in zwei Komponenten zerlegen

$$\vec{J}_L = -i \int d^3r \vec{E}_\perp \wedge \vec{A}$$

Bahndrehimpuls

$$\begin{aligned} \vec{J}_S &= \int d^3r \vec{E}_\perp \times \vec{A} \\ &= \int d^3r \vec{e}_j \epsilon_{ijk} \vec{E}_\perp^j \vec{A}^k \end{aligned}$$

innerer Drehimpuls oder Spin

U.A.: Man zeige, daß $\hat{J}_S^j$ ein Generator für infinitesimale Drehungen um die j -Achse ist

Nun wollen wir $\hat{J}_S^j$ etwas genauer betrachten. Dazu setzen wir die Normalmodularzerlegung für $\vec{A}$ an:

$$\begin{aligned} \hat{J}_S^j &= \int d^3r \frac{\epsilon_{ijk}}{2L^3} \sum_{\substack{\alpha, \beta \\ n, m}} \frac{i\omega_n}{\omega_n \omega_m} \vec{e}_n^{\alpha j} \vec{e}_m^{\beta k} \cdot \\ &\quad \left\{ \hat{a}_{n\alpha} \hat{a}_{m\beta} e^{-i(\vec{k}_n + \vec{k}_m) \cdot \vec{r}} - \hat{a}_{n\alpha}^+ \hat{a}_{m\beta}^+ e^{i(\vec{k}_n + \vec{k}_m) \cdot \vec{r}} \right. \\ &\quad \left. - \hat{a}_{n\alpha}^+ \hat{a}_{m\beta} e^{i(\vec{k}_n - \vec{k}_m) \cdot \vec{r}} + \hat{a}_{n\alpha} \hat{a}_{m\beta}^+ e^{-i(\vec{k}_n - \vec{k}_m) \cdot \vec{r}} \right\} \end{aligned}$$

$$= i \sum_{n, \alpha, \beta} \frac{\epsilon_{ijk}}{2} \left\{ \vec{e}_n^{\alpha j} \vec{e}_{-n}^{\beta k} [\hat{a}_{n\alpha} \hat{a}_{-n\beta} - \hat{a}_{n\alpha}^{\dagger} \hat{a}_{-n\beta}^{\dagger}] \right. \\ \left. + \vec{e}_n^{\alpha j} \vec{e}_n^{\beta k} [\hat{a}_{n\alpha} \hat{a}_{n\beta}^{\dagger} - \hat{a}_{n\alpha}^{\dagger} \hat{a}_{n\beta}] \right\}$$

Der erste Term in $\{\dots\}$ ist symmetrisch in j und k ($n \leftrightarrow -n, \alpha \leftrightarrow \beta$) und verschwindet in der Kombination mit ϵ_{ijk} . Der zweite Term ist es nicht falls $\alpha \neq \beta$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\mathcal{L}}_S = i \sum_n \sum_{\alpha \neq \beta} (\vec{e}_n^{\alpha} \times \vec{e}_n^{\beta}) \hat{a}_{n\beta}^{\dagger} \hat{a}_{n\alpha} + \text{vak.}}$$

Spin des elm. Feldes

linear polarisierte Basis $\vec{e}_n^1 \times \vec{e}_n^2 = \vec{k}_n / |\vec{k}_n|$

$$\boxed{\vec{\mathcal{L}}_S = i \sum_n \frac{\vec{k}_n}{|\vec{k}_n|} (\hat{a}_{n2}^{\dagger} \hat{a}_{n1} - \hat{a}_{n1}^{\dagger} \hat{a}_{n2})}$$

Vakuumterm weglassen

Zirkulare oder Helizitätsbasis

$$\vec{e}_n^{+} \equiv -\frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{e}_n^1 + i \vec{e}_n^2)$$

$$\vec{e}_n^{-} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{e}_n^1 - i \vec{e}_n^2)$$

$$\vec{R}_s = \sum_n \frac{\vec{k}_n}{|\vec{k}_n|} (\hat{a}_{n+}^\dagger \hat{a}_{n+} - \hat{a}_{n-}^\dagger \hat{a}_{n-})$$

wobei $\hat{a}_{n+} \vec{e}_n^+ + \hat{a}_{n-} \vec{e}_n^- = \hat{a}_{n+} \vec{e}_n^+ + \hat{a}_{n-} \vec{e}_n^-$
verwendet wurde

Eigenwerte und Eigenzustände mit $\hat{n} = \hat{n}_+ + \hat{n}_- = 1$
o.B.d.A. $\vec{k}_n / |\vec{k}_n| = \vec{e}_z$

$$R_c^z = \hat{a}_+^\dagger \hat{a}_+ - \hat{a}_-^\dagger \hat{a}_-$$

$$|n_+ = 1, n_- = 0\rangle$$

Eigenwert +1

$$|n_+ = 0, n_- = 1\rangle$$

Eigenwert -1

$\Rightarrow$

Photon Spin-1 Teilchen

§ Eigenzustand von R_s^z mit Eigenwert 0.
Das liegt an der Zusatzbedingung $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$.
Die Coulombbedingung reduziert die Freiheitsgrade pro Mode auf 2. Diese Eigenschaft führt dazu, daß die Polarisationsfreiheitsgrade auf ein Spin 1/2 System abgebildet werden können. Nichtsdestotrotz ist das elm. Feld ein Spin-1 Feld. Das elm. Feld transformiert sich bei Rotation gemäß der Spin-1 Darstellung der Drehgruppe.

Äquivalenz zu Spin 1/2 Algebra (Schwinger)

$$\hat{S}_z = \frac{1}{2} (\hat{a}_+^\dagger \hat{a}_+ - \hat{a}_-^\dagger \hat{a}_-)$$

$$\hat{S}_+ = \hat{a}_+^\dagger \hat{a}_-$$

$$\hat{S}_- = \hat{a}_-^\dagger \hat{a}_+$$

$$\hat{S}_x = \frac{1}{2} (\hat{S}_+ + \hat{S}_-) = \frac{1}{4} (\hat{a}_+^\dagger \hat{a}_- + \hat{a}_-^\dagger \hat{a}_+)$$

$$\hat{S}_y = \frac{1}{2i} (\hat{S}_+ - \hat{S}_-) = \frac{1}{4i} (\hat{a}_+^\dagger \hat{a}_- - \hat{a}_-^\dagger \hat{a}_+)$$

Bew:

$$\begin{aligned} [\hat{S}_x, \hat{S}_y] &= \frac{1}{4i} [\hat{a}_+^\dagger \hat{a}_- + \hat{a}_-^\dagger \hat{a}_+, \hat{a}_+^\dagger \hat{a}_- - \hat{a}_-^\dagger \hat{a}_+] \\ &= \frac{1}{2i} [\hat{a}_-^\dagger \hat{a}_+, \hat{a}_+^\dagger \hat{a}_-] = \frac{1}{2i} \{ \hat{a}_-^\dagger [\hat{a}_+, \hat{a}_+^\dagger] \hat{a}_- \\ &\quad + \hat{a}_+^\dagger [\hat{a}_-, \hat{a}_-^\dagger] \hat{a}_+ \} = \frac{1}{2i} (\hat{a}_-^\dagger \hat{a}_- - \hat{a}_+^\dagger \hat{a}_+) \\ &= i \hat{S}_z \quad \text{etc} \end{aligned}$$

außerdem

$$\begin{aligned} \hat{S}_x^2 + \hat{S}_y^2 + \hat{S}_z^2 &= \frac{1}{4} (\hat{a}_+^\dagger \hat{a}_- + \hat{a}_-^\dagger \hat{a}_+)^2 \\ &\quad - \frac{1}{4} (\hat{a}_+^\dagger \hat{a}_- - \hat{a}_-^\dagger \hat{a}_+)^2 + \frac{1}{4} (\hat{a}_+^\dagger \hat{a}_+ - \hat{a}_-^\dagger \hat{a}_-)^2 \\ &= \frac{1}{2} \hat{a}_+^\dagger \hat{a}_- \hat{a}_-^\dagger \hat{a}_+ + \frac{1}{2} \hat{a}_-^\dagger \hat{a}_+ \hat{a}_+^\dagger \hat{a}_- + \frac{1}{4} [(\hat{a}_+^\dagger \hat{a}_+)^2 + (\hat{a}_-^\dagger \hat{a}_-)^2] \\ &\quad - \frac{1}{2} \hat{a}_+^\dagger \hat{a}_+ \hat{a}_-^\dagger \hat{a}_- \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4} \left[(\hat{a}_+^\dagger \hat{a}_+)^2 + (\hat{a}_-^\dagger \hat{a}_-)^2 + 2 \hat{a}_+^\dagger \hat{a}_+ + 2 \hat{a}_-^\dagger \hat{a}_- \right]$$

$$= \frac{\hat{n}}{2} \left(\frac{\hat{n}}{2} + 1 \right) \quad \hat{n} = \hat{a}_+^\dagger \hat{a}_+ + \hat{a}_-^\dagger \hat{a}_-$$

□

II.6 Dirac Feld

Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} \left[\frac{i}{2} \gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu - m \right] \psi$$

konjugierte Felder und Hamiltonoperatoren

$$\bar{\pi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \psi)} = \frac{i}{2} \bar{\psi} \gamma^0 = \frac{i}{2} \psi^\dagger \quad \pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \bar{\psi})} = -\frac{i}{2} \gamma^0 \psi$$

Ähnlich wie im Fall des Schrödingerfeldes sind die Felder ψ und $\psi^\dagger$ nicht unabhängig von den verallgemeinerten Impulsen $\pi, \bar{\pi}$.

⇒ Quantisierung (fermionische Vertauschungsregeln)

$$\{\psi(\vec{r}, t), \psi(\vec{r}', t)\} = \{\psi^\dagger(\vec{r}, t), \psi^\dagger(\vec{r}', t)\} = 0$$

$$\{\psi_\alpha(\vec{r}, t), \psi_\beta^\dagger(\vec{r}', t)\} = \delta_{\alpha\beta} \delta(\vec{r} - \vec{r}')$$

Wir werden auch hier sehen, daß eine bosonische Quantisierung zu einem nach unten unbeschränkten Hamiltonoperator führt.

$$\hat{H} = \int d^3\vec{r} \quad \hat{\psi}^\dagger \left[-i \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + \beta m \right] \hat{\psi}$$

Wir betrachten zunächst freie Teilchen. Das freie Diracfeld hat positive und negative Energielösungen

$$(*) \quad \psi_p^{(\pm)}(\vec{r}, t) = N_p e^{i(\vec{p} \cdot \vec{r} \mp E_p t)} \begin{pmatrix} \chi \\ \eta \end{pmatrix}$$

periodische Randbedingungen in L^3 liefern

$$\vec{p}_n = \frac{2\pi}{L} (n_x, n_y, n_z) \quad n_i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

χ und η sind 2-komponentige Vektoren und $E_p > 0$.

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \quad \beta = \begin{pmatrix} 1_2 & 0 \\ 0 & -1_2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\psi^{(\pm)}} \quad \vec{p} \cdot \vec{r} - E_p t = -p_\mu x^\mu$$

(*) in Diracgleichung

$$E_p \begin{pmatrix} \chi \\ \eta \end{pmatrix} e^{-ip_\mu x^\mu} = \begin{pmatrix} m & -i \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla} \\ -i \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla} & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi \\ \eta \end{pmatrix} e^{-ip_\mu x^\mu}$$

$\Rightarrow$

$$E_p \chi = m \chi + \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \eta$$

$$E_p \eta = \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \chi - m \eta$$

nichttriviale Lösungen existieren nur falls $\det(\cdot) \neq 0$

$$\Rightarrow \boxed{E_p^2 = p^2 + m^2} \quad \text{relativistische Energie-
relation}$$

außerdem

$$\chi = \left(\frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E_p + m} \right) \chi$$

Daher

$$\psi_p^{(+)}(\vec{r}) = N_p e^{-i p \cdot x} \begin{pmatrix} \chi \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E_p + m} \chi \end{pmatrix}$$

χ ist ein zweikomponentiger Spinor da der Zustand eines spin $1/2$ Teilchens beschreibt. Wählen wir die Quantisierungsachse als z -Achse so sind die Spin eigenzustände $(\sigma_z) \chi^{(s)}$ mit $s = \pm 1/2$

$$\boxed{\chi^{(+\frac{1}{2})} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \chi^{(-\frac{1}{2})} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

Außerdem ergibt sich aus der Normierungsbedingung

$$1 \stackrel{!}{=} \int_{L^3} d^3r \psi^\dagger \psi = N_p^2 L^3 \left[1 + \frac{(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})^2}{(E_p + m)^2} \right]$$

$$\begin{aligned} (\vec{\sigma} \cdot \vec{p})^2 &= \sigma_i p_i \sigma_j p_j = \sigma_i \sigma_j p_i p_j \\ &= \sum_{i=1}^3 \sigma_i \sigma_i p_i p_i = \vec{p} \cdot \vec{p} = p^2 \end{aligned}$$

$$1 = N_p^2 L^3 \left[1 + \frac{p^2}{(E_p + m)^2} \right] = N_p^2 L^3 \left[1 + \frac{E_p^2 - m^2}{(E_p + m)^2} \right]$$

$$= N_p^2 L^3 \left[1 + \frac{E_p - m}{E_p + m} \right] = N_p^2 L^3 \frac{2E_p}{E_p + m}$$

$$\Rightarrow N_p = \frac{1}{\sqrt{2E_p L^3}} \sqrt{E_p + m}$$

D.h.

$$\psi_{ps}^{(+)}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{2E_p L^3}} u(\vec{p}, s) e^{-i p_\mu x^\mu}$$

mit

$$u(\vec{p}, s) = \sqrt{E_p + m} \begin{pmatrix} \chi^{(s)} \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E_p + m} \chi^{(s)} \end{pmatrix}$$

$\vec{p} \rightarrow 0$

$$u(p, s) \sim \begin{pmatrix} \chi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\psi^{(-)}$

$$-E_p \chi = m \chi + \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \eta$$

$$-E_p \eta = \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \chi - m \eta$$

$$\Rightarrow \chi = - \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E_p + m} \eta$$

Spineigenzustände $\eta^{(s)}$ mit $s = \pm \frac{1}{2}$

$$\eta^{(\frac{1}{2})} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \eta^{(-\frac{1}{2})} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Begründung für die Wahl des Minuszeichens in $\eta^{(\frac{1}{2})}$ wird gleich klar werden.

	$\psi_{-p, -s}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{2E_p L^3}} u(\vec{p}, s) e^{i p_\mu x^\mu}$	$\vec{p} \rightarrow 0$
mit	$u(\vec{p}, s) = \sqrt{E_p + m} \begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E_p + m} \eta^{(-s)} \\ \eta^{(-s)} \end{pmatrix}$	$u(0, s) \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Ladungskonjugation

Betrachten Dirac-Gleichung in ehm. Feld

$$\left[\gamma^\mu \left(i \frac{\partial}{\partial x^\mu} - e A_\mu \right) - m \right] \psi = 0$$

und Transformation

$$\psi \rightarrow \boxed{\psi^c \equiv -i \alpha_2 \beta \psi^* \equiv C \beta \psi^*}$$

d.h. $C = \begin{pmatrix} 0 & -i \sigma_2 \\ -i \sigma_2 & 0 \end{pmatrix}$

Es gilt

$$C \alpha_k C^{-1} = -\alpha_k^* \quad C \beta C^{-1} = \beta$$

d.h.

$$C \gamma^\mu C^{-1} = -\gamma^{\mu T}$$

$$\Rightarrow \left[\gamma^{\mu*} \left(-i \frac{\partial}{\partial x^\mu} - e A_\mu \right) - m \right] \psi^* = 0$$

$$C \beta \gamma^{\mu*} \left(-i \frac{\partial}{\partial x^\mu} - e A_\mu \right) \psi^* - m \psi^C = 0$$

$$C \beta \gamma^{\mu*} \beta C^{-1} \left(-i \frac{\partial}{\partial x^\mu} - e A_\mu \right) \psi^C - m \psi^C = 0$$

$$\beta C \gamma^{\mu*} C^{-1} \beta \left(-i \frac{\partial}{\partial x^\mu} - e A_\mu \right) \psi^C - m \psi^C = 0$$

$$\underbrace{\beta \gamma^{\mu T} \beta}_{\gamma^\mu} \left(i \frac{\partial}{\partial x^\mu} + e A_\mu \right) \psi^C - m \psi^C = 0$$

$$\left[\gamma^\mu \left(i \frac{\partial}{\partial x^\mu} + e A_\mu \right) - m \right] \psi^C = 0$$

Das ist die Diracgleichung mit $e \rightarrow -e$. D.h. ψ^C ist das ladungskonjugierte Feld zu ψ .

Ladungskonjugation von $\psi_{\vec{p},s}^{(+)} = \frac{1}{\sqrt{2E_p L^3}} u(\vec{p},s) e^{-ip_\mu x^\mu}$

$$\begin{aligned} C \beta u^*(\vec{p},s) &= \sqrt{E_p + m} \quad C \beta \begin{pmatrix} \chi^{(s)} \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E_p + m} \chi^{(s)} \end{pmatrix} \\ &= \sqrt{E_p + m} \begin{pmatrix} 0 & i\sigma_2 \\ -i\sigma_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi^{(s)} \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E_p + m} \chi^{(s)} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

es gilt $\vec{\sigma}_2 \vec{\sigma}^* \vec{\sigma}_2 = -\vec{\sigma}$

$$\Rightarrow C \beta u^*(\vec{p}, s) = \sqrt{E_p + m} \begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma} \vec{p}}{E_p + m} \\ 1 \end{pmatrix} (-i \vec{\sigma}_2 \chi^{(s)})$$

Falls wir die Vorzeichenkonvention da $\chi^{(s)}$ von S. 83 benutzen ist dies gerade

$$C \beta u^*(\vec{p}, s) = v(\vec{p}, s)$$

$$\Rightarrow \left[\psi_{\vec{p}, s}^{(+)}(\vec{r}, t) \right]^c = \psi_{-\vec{p}, -s}^{(-)}(\vec{r}, t)$$

Ladungskonjugation der Lösungen positiver Energie mit Impuls $\vec{p}$ und Spin s liefert Lösungen negativer Energie mit Impuls $-\vec{p}$ und Spin $-s$!

Normalmodenzerlegung des quantisierten Dirac-Feldes

$$(*) \quad \hat{\psi}(x) = \sum_{n, s} \left(\hat{b}_{n, s} \psi_{n, s}^{(+)}(x) + \hat{d}_{n, s}^{\dagger} \psi_{-n, -s}^{(-)}(x) \right)$$

$$x \equiv (\vec{r}, t)$$

$\hat{b}_{n, s}$ Vernichtung eines Teilchens mit Impuls $\vec{p}_n$ und Spinprojektion s

$\hat{d}_{n, s}^{\dagger}$ Vernichtung eines Antiteilchens mit Impuls $\vec{p}_n$ und Spinprojektion s

Hier haben wir wieder die Identifikation: Loch mit Impuls $-\vec{p}$ und Spinprojektion $-s \hat{=} \text{Antiteilchen mit Impuls } \vec{p} \text{ und Spinprojektion } s \text{ vorgenommen.}$

Setzen wir (*) in den Hamiltonoperator des Dirac-Feldes ein und berücksichtigen

$$(-i \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + \beta m) \psi^{(\pm)} = \pm E_p \psi^{(\pm)}$$

erhalten wir

$$\hat{H} = \int d^3r \sum_{n,s} \sum_{n',s'} \left(\hat{b}_{n,s}^\dagger \psi_{n,s}^{(+)\dagger}(x) + \hat{d}_{n,s}^\dagger \psi_{-n,-s}^{(-)\dagger}(x) \right) E_n \left(\hat{b}_{n',s'} \psi_{n',s'}^{(+)}(x) - \hat{d}_{n',s'}^\dagger \psi_{-n',-s'}^{(-)}(x) \right)$$

Mit der Orthogonalität der Eigenlösungen

$$\int d^3r \psi_{m,s}^{(\pm)\dagger}(x) \psi_{m',s'}^{(\pm)}(x) = \delta_{mm'} \delta_{ss'}$$

$$\int d^3r \psi_{m,s}^{(+)\dagger}(x) \psi_{m',s'}^{(-)}(x) = 0$$

ergibt sich schließlich

$$\hat{H} = \sum_{n,s} E_n \left(\hat{b}_{n,s}^\dagger \hat{b}_{n,s} - \hat{d}_{n,s}^\dagger \hat{d}_{n,s} \right)$$

(a) bosonische Vertauschungsregeln

$$\hat{d}_{n,s}^\dagger \hat{d}_{n,s}^\dagger = \hat{d}_{n,s}^\dagger \hat{d}_{n,s} + 1$$

$$\Rightarrow \hat{H}_{\text{Bose}} = \sum_{n,s} E_n \left(\hat{b}_{ns}^\dagger \hat{b}_{ns} - \hat{d}_{ns}^\dagger \hat{d}_{ns} \right) + \text{Vakuum}$$

nicht positiv definit $\nexists$

(b) fermionische Vertauschungsregeln

$$\hat{d}_{ns} \hat{d}_{ns}^\dagger = -\hat{d}_{ns}^\dagger \hat{d}_{ns} + 1$$

$$\Rightarrow \hat{H}_{\text{Fermi}} = \sum_{n,s} E_n \left(\hat{b}_{ns}^\dagger \hat{b}_{ns} + \hat{d}_{ns}^\dagger \hat{d}_{ns} \right) + \text{Vakuum}$$

positiv definit! $\checkmark$ 😊

$\Rightarrow$

$$\{ \hat{b}_{n,s}, \hat{b}_{n',s'}^\dagger \} = \delta_{nn'} \delta_{ss'}$$

$$\{ \hat{d}_{n,s}, \hat{d}_{n',s'}^\dagger \} = \delta_{nn'} \delta_{ss'}$$

$$\{ \hat{b}_{n,s}, \hat{d}_{n',s'}^\dagger \} = 0$$

Das Dirac Feld muß als fermionisches Feld quantisiert werden!