

I. Elemente der klassischen Feldtheorie

I.1. Zur Erinnerung: Grundbegriffe der Relativitätstheorie (c=1!)

4-Orbvektor $x^\mu = (t, \vec{r})$ contravariant
 $x_\mu = (t, -\vec{r})$ covariant

metrischer Tensor $g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} = g^{\mu\nu}$

Summenkonvention $f^\mu g_\mu = \sum_{\mu=0}^3 f^\mu g_\mu$

4-Gradient $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla} \right)$

$$\partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla} \right)$$

Metrik im Minkowski-Raum

$$g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

Skalarprodukt

$$xy = x^\mu y_\mu = x_\mu y^\mu$$

ko-kontravariant x

$$a^\mu = g^{\mu\nu} a_\nu \quad a_\mu = g_{\mu\nu} a^\nu$$

$$xx = (x_0)^2 - \vec{x} \cdot \vec{x}$$

LO raufzheben

$$x'^\mu = L^\mu_\nu x^\nu$$

es gilt $x'^\mu x'_\mu = L^\mu_\nu L_\mu^\beta x^\nu x_\beta \stackrel{!}{=} x^\beta x_\beta$

$\det(L) = \pm 1$ eigentlch / uneigentlch
 $L^0_0 \geq 1$ orthochrone

boost $\cosh \xi = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$ $\sinh \xi = \frac{v}{\sqrt{1-v^2}}$

$L^\mu_\nu(\alpha) = \begin{pmatrix} \cosh \xi & -\sinh \xi & & \\ -\sinh \xi & \cosh \xi & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$ in x Richtung

Rotation

Zeitumkehr

$T = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$

Paritätsinversion

$P = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$

I.2 wichtige Beispiele elementarer Feldtheorien

A. nicht-relativistische Quantenmechanik: Schrödingerfeld

$\psi(\vec{r}, t)$, $\psi^*(\vec{r}, t)$ einkomponentiges komplexes Feld

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r}, t) = - \frac{1}{2m} \Delta \psi(\vec{r}, t) + V(\vec{r}) \psi(\vec{r}, t)$$

B. Maxwellfeld (rationalisierte Gaußsche Einheiten) $c=1$ kein "4 π "

4-Stromdichte

$$j^\mu = (\rho, \vec{j})$$

$$j_\mu = (\rho, -\vec{j})$$

4-Potential

$$A^\mu = (\phi, \vec{A})$$

$$A_\mu = (\phi, -\vec{A})$$

Ladungserhaltung

$$\partial_\mu j^\mu = \partial^\mu j_\mu = 0$$

Lorentz-Eichung

$$\partial_\mu A^\mu = \partial^\mu A_\mu = 0$$

Coulomb-Eichung

$$\partial_\mu A^\mu = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$$

Wellengl. in L-Eichung

$$\square A^\mu = \partial_\nu \partial^\nu A^\mu = j^\mu$$

Feldstärke tensor

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

$$F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$$

6 unabh. Komp.

inhom.

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

inhomogene Maxwellgleichungen

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu$$

homogene MWGL automatisch erfüllt

Eichfreiheit

$$A_\mu \rightarrow \tilde{A}_\mu = A_\mu - \partial_\mu \Lambda$$

Λ - Lorentzskalar

$$\begin{aligned} \text{da } F^{\mu\nu} \rightarrow \tilde{F}^{\mu\nu} &= \partial^\mu \tilde{A}^\nu - \partial^\nu \tilde{A}^\mu = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \\ &\quad - \partial^\mu \partial^\nu \Lambda + \partial^\nu \partial^\mu \Lambda \\ &= F^{\mu\nu} \end{aligned}$$

C. Dirac - Feld

ψ - Bispinor

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi = 0$$

$$\beta = \begin{pmatrix} 1_2 & 0 \\ 0 & -1_2 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \alpha_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \alpha_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

γ -Matrizen:

$$\gamma^\mu = (\beta, \beta \alpha_i)$$

$$\gamma^0 = \beta = \begin{pmatrix} 1_2 & 0 \\ 0 & -1_2 \end{pmatrix} \quad \gamma^i = \beta \alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_i \\ -\alpha_i & 0 \end{pmatrix}$$

es gilt

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}$$

darüberhinaus ist

$$\gamma^{0+} = \gamma^0 \quad \gamma^{i+} = -\gamma^i$$

aber

$$\gamma^0 \gamma^\mu + \gamma^\mu \gamma^0 = \gamma^\mu$$

Dirac-Feld gekoppelt an ein elm. Feld

$$\left[\gamma^\mu (i\partial_\mu - eA_\mu) - m \right] \psi = 0$$

$\psi^\dagger \psi$ ist keine Lorentzinvariante, jedoch $\bar{\psi} \psi$
wobei

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$$

adjungierter Dirac Spinor genannt wird

bilineare Kovarianten der Dirac-Theorie

$$\bar{\psi} \psi$$

Skalar

$$\bar{\psi} \gamma^\mu \psi$$

4-Vektor

$$\bar{\psi} \sigma^{\mu\nu} \psi$$

antisymmetrischer Tensor
2'er Stufe

$$\bar{\psi} \gamma^5 \psi$$

Pseudoskalar

$$\bar{\psi} \gamma^5 \gamma^\mu \psi$$

Pseudovektor

$$\gamma^5 \equiv i \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_2 \\ \mathbb{1}_2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]$$

$$\sigma^{0j} = i \begin{pmatrix} 0 & \sigma_j \\ \sigma_j & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma^{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_k & 0 \\ 0 & \sigma_k \end{pmatrix} \quad \text{wobei } ij \text{ zyklisch} \\ = 1, 2, 3$$

Lorentztransformation eines Bi-spinors

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = L^\mu_\nu x^\nu \quad \text{mit } L^\mu_\nu = \Lambda^\mu_\nu(x, x') \quad (1)$$

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x') = S(L) \psi(x')$$

Kovarianz der Dirac Gleichung

$$S^{-1} \gamma^\mu S = \Lambda^\mu_\nu \gamma^\nu$$

Damit findet man für die Bispinor Transformation

$$S = e^{\frac{1}{2} \vec{\Sigma} \cdot \vec{\alpha} - \frac{i}{2} \gamma^5 \vec{n}_\theta \cdot \vec{\alpha} \theta} \quad \begin{array}{l} \text{eigentliche} \\ \text{orthogonale} \\ \text{LT} \end{array}$$

$|\vec{\Sigma}|$ Rapidität $\vec{\Sigma}/|\vec{\Sigma}|$ Richtung des boosts

$\vec{n}_\theta$ Einheitsvektor der Rotationsachse, θ Rotationswinkel

I.3. Lagrange-Hamilton Formalismus für Felder

(A) Zur Erinnerung: Punktmechanik

$q_i, \dot{q}_i$ Koordinaten und Geschwindigkeiten

$L(q_i, \dot{q}_i, t)$ Lagrangefunktion

Hamilton Prinzip

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t) dt = 0 \quad \text{mit } \delta q_i(t_{1,2}) = 0$$

$$\delta L = \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right)$$

mit part. Int

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} dt \delta L = \sum_i \int dt \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \right) \delta q_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \Big|_{t_1}^{t_2} \stackrel{!!}{=} 0$$

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0} \quad \text{Euler-Lagrange Gl.}$$

verallg. Impulse $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$

Hamiltonfunktion und kanon. Gleichungen

$$\boxed{H = \sum_i \dot{q}_i p_i - L}$$

$$\boxed{\dot{p}_i = - \frac{\partial H}{\partial q_i} \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}}$$

Poisson-Klammer $\{f, g\} = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right)$

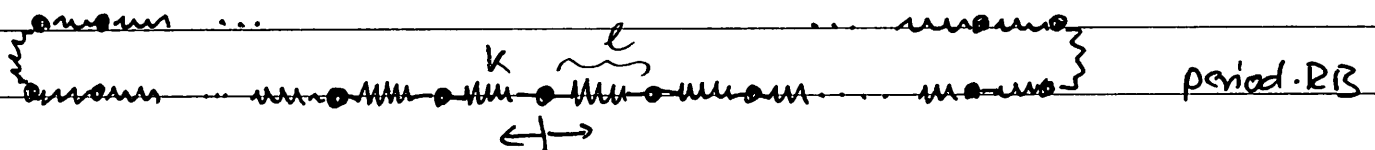
$$\boxed{\dot{p}_i = \{p_i, H\}}$$

$$\boxed{\dot{q}_i = \{q_i, H\}}$$

$$\boxed{\frac{d}{dt} f(q_i, p_i) = \{f, H\}}$$

mit $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$

(B) Die Eindimensionale harmonische Kette in einem äußeren Kraftfeld



+ äußere harm.
Kraft

$$x_{i-1}, x_i, x_{i+1}$$

$$x_N = x_0$$

N gekoppelte Oszillatoren
mit periodischen R.B.

$$T = \frac{m}{2} \sum_{i=0}^{N-1} \dot{q}_i^2$$

$$V = \frac{k}{2} \sum_{i=0}^{N-1} (q_{i+1} - q_i)^2 + \frac{g}{2} \sum_{i=0}^{N-1} q_i^2$$

Lagrangefunktion

äußere harm. Kraft

$$L = \sum_{i=0}^{N-1} \left[\frac{m}{2} \dot{q}_i^2 - \frac{k}{2} (q_{i+1} - q_i)^2 - \frac{g}{2} q_i^2 \right]$$

Kontinuuumslimes

$$l \rightarrow 0, N \rightarrow \infty, m \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$$

$$\text{aber } L = Nl = \text{konst}$$

$$\mu = m/l = \text{konst.}$$

$$\kappa = kl = \text{konst}$$

$$g = gl = \text{konst}$$

$$q_i(t) = q(z_i, t) \rightarrow q(z, t)$$

$$\sum_{i=0}^{N-1} l \rightarrow \int_0^L dz$$

$$L = \int_0^L dz \left[\frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial q(z, t)}{\partial t} \right)^2 - \frac{\kappa}{2} \left(\frac{\partial q(z, t)}{\partial z} \right)^2 - \frac{g}{2} q(z, t)^2 \right]$$

D.h. wir sehen die Lagrangefunktion hat die Struktur

$$L = \int_0^L dz \mathcal{L}(z, t)$$

$\mathcal{L}$ - Lagrangedichte

analog für det man

$$H = \int_0^L dz \mathcal{H}(z, t)$$

$\mathcal{H}$ - Hamiltondichte

Was passiert mit den Euler-Lagrange Gleichungen im Kontinuumslimit?

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = -k \left[-(q_{i+1} - q_i) + (q_i - q_{i-1}) \right] - g q_i$$

$$= \underbrace{kl}_{\mu} \left[\frac{(q_{i+1} - q_i)}{l} - \frac{(q_i - q_{i-1}))}{l} \right] - \frac{g}{l} q_i$$

$$\xrightarrow{l \rightarrow 0} \frac{\mu l}{l} \left[\left. \frac{\partial q(z, t)}{\partial z} \right|_{z+\frac{l}{2}} - \left. \frac{\partial q(z, t)}{\partial z} \right|_{z-\frac{l}{2}} \right] - g l q$$

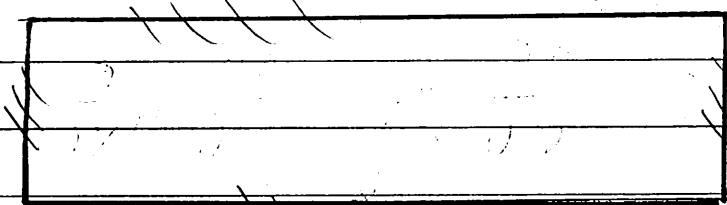
$$= - \mu l \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial q(z, t)}{\partial z} \right) + l \frac{\partial L}{\partial q(z, t)}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = m \ddot{q}_i = \mu l \frac{\partial^2 q(z, t)}{\partial t^2} = l \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial (\frac{\partial q}{\partial t})}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \rightarrow l \left[- \mu \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial q}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial (\frac{\partial q}{\partial t})} + \frac{\partial L}{\partial q} \right]$$

das liefert

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial (\frac{\partial q}{\partial t})} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial L}{\partial (\frac{\partial q}{\partial z})} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$



(C) Euler-Lagrange Gleichungen für Felder;
Hamilton Formalismus

Das eben gefundene kann auf allgemein Lagrangedichten
von Feldern $\phi'(x^\mu)$ verallgemeinert werden

$$\mathcal{L} = \mathcal{L} \left[\phi, \frac{\partial}{\partial x^\mu} \phi \right]$$

$$0 = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt \mathcal{L} = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt \int dV \mathcal{L} [\phi, \partial_\mu \phi]$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \int dV \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta (\partial_\mu \phi) \right]$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \int dV \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta \phi - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) \delta \phi \right]$$

$$+ \int_{t_1}^{t_2} dt \int dV \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta \phi \right]$$

$$= \text{Oberflächenintegral} = 0$$

da $\delta \phi(x=t_{1,2}) = 0$

$\Rightarrow$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0}$$

Euler-Lagrange
Gleichungen
für Felder

kanonischer Impuls

$$\dot{q}_i \rightarrow p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

$$\pi(\mathbf{z}, t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \phi(\mathbf{z}, t)}{\partial t} \right)}$$

Problem: nicht L -invariant!

Hamiltondichte

$$\mathcal{H} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \phi)} \partial_0 \phi - \mathcal{L} = \pi \dot{\phi} - \mathcal{L}$$

Bem! Es gibt kovariante Verallgemeinerungen von $\mathcal{H}$
kanonischer Energie-Impulstensor

$$T^{\alpha\beta} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha \phi)} \left(\frac{\partial}{\partial x^\beta} \phi \right) - g^{\alpha\beta} \mathcal{L}$$

dann ist

$$T^{00} = \mathcal{H}$$

Von welchen Variablen hängt die Hamiltondichte ab?

$$d\mathcal{H} = \dot{\phi} d\pi + \pi d\dot{\phi} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} d\phi - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} d(\partial_\mu \phi) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} dx^\mu$$

kompastriert $\mu=0$ Term

$$= \dot{\phi} d\pi - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} d\phi - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_i \phi)} d(\partial_i \phi) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} dx^\mu$$

D.h. $\mathcal{H}$ hängt auch von den räumlichen Ableitungen $\partial_i \phi$ ab

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}[\pi, \varphi, \partial_i \phi, x^\mu] \quad i = 1, 2, 3$$

Aus obiger Rechnung ist sofort evident

$$\frac{\partial}{\partial E} \phi = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \pi}$$

1. Hamiltonsche Gleichung

aus den Euler-Logarithmengleichungen folgt

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \frac{\partial}{\partial t} \pi$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \pi = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial x^i} \underbrace{\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial (\partial_i \phi)}}_{= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi}}$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial t} = - \left[\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial x'} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial (\partial_i \phi)} \right]$$

2. Hamiltonsche
Gleichung

Können die Hamiltonschen Gleichungen in eine symplektische Form gebracht werden und wie lassen sich die Poissonklammern der klassischen Mechanik auf Felder übertragen?

Funktionalableitung

$$F = F[\varphi(x), \varphi'(x)] = \int dx f(\varphi(x), \varphi'(x))$$

$$\frac{\delta F}{\delta \varphi(y)} \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int dx \left\{ f(\varphi(x) + \varepsilon \delta(x-y), \frac{d}{dx}(\varphi(x) + \varepsilon \delta(x-y))) - f(\varphi(x), \frac{d}{dx} \varphi(x)) \right\}$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int dx \left(\frac{\partial f}{\partial \varphi} \delta(x-y) + \frac{\partial f}{\partial \varphi'} \frac{d}{dx} \delta(x-y) \right)$$

$$= \int dx \left(\frac{\partial f}{\partial \varphi} - \frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial \varphi'} \right) \delta(x-y) + \text{Randterme} = 0$$

$$\boxed{\frac{\delta F}{\delta \varphi(y)} \equiv \frac{\partial f}{\partial \varphi(y)} - \frac{d}{dy} \frac{\partial f}{\partial \varphi'(y)}}$$

Damit lassen sich die Hamiltonschen Gleichungen in der symplektischen Form schreiben

$$\boxed{\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta \pi}}$$

$$\boxed{\frac{\partial \pi}{\partial t} = - \frac{\delta H}{\delta \phi}}$$

H wirkt

Poissonklammern:

$$\text{Sei } F \pm \int dV f(\phi, \pi, \partial_i \phi, x^\mu)$$

und $G = \int dV g(\phi, \pi, \partial_i \phi, x^\mu)$

$$\Rightarrow \boxed{\{F, G\} \equiv \int dV \left(\frac{\delta F}{\delta \phi} \frac{\delta G}{\delta \pi} - \frac{\delta G}{\delta \phi} \frac{\delta F}{\delta \pi} \right)}$$

Poisson-
klammer

Mit Hilfe eines kleinen Tricks können das Feld $\phi(x)$ und das kanonisch konjugierte Feld $\pi(x)$ als Funktionale geschrieben werden

$$\phi(\vec{y}, t) = \int d^3x \phi(\vec{x}, t) \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y})$$

$$\pi(\vec{y}, t) = \int d^3x \pi(\vec{x}, t) \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y})$$

Damit ergibt sich

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \phi(\vec{y}, t) &= \{ \phi(\vec{y}, t), H \} \\ \frac{\partial}{\partial t} \pi(\vec{y}, t) &= \{ \pi(\vec{y}, t), H \} \end{aligned}}$$

kanonische Gleichungen
der klassischen
Feldtheorie

Bew:

$$\frac{\delta \phi(\vec{y}, t)}{\delta \phi(\vec{x}, t)} = \frac{\partial \phi(\vec{x}, t) \delta(\vec{x} - \vec{y})}{\partial \phi} = \delta(\vec{x} - \vec{y})$$

$$\{ \phi(\vec{y}, t), H \} = \int dV \left(\underbrace{\frac{\delta \phi(\vec{y}, t)}{\delta \phi(\vec{x}, t)}}_{\delta(\vec{x} - \vec{y})} \frac{\delta H}{\delta \pi(\vec{x}, t)} - \underbrace{\frac{\delta \phi}{\delta \pi}}_0 \frac{\delta H}{\delta \phi} \right)$$

$$= \int dV \delta(\vec{x} - \vec{y}) \frac{\partial}{\partial t} \phi(\vec{x}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \phi(\vec{y}, t)$$

□

außerdem hat man die fundamentalen Poissonklammern der Felder

$$\begin{aligned} \{\phi(\vec{y}, t), \phi(\vec{z}, t)\} &= \{\pi(\vec{y}, t), \pi(\vec{z}, t)\} = 0 \\ \{\phi(\vec{y}, t), \pi(\vec{z}, t)\} &= \delta^{(3)}(\vec{y} - \vec{z}) \end{aligned}$$

Bew:

$$\{\phi(\vec{y}), \pi(\vec{z})\} = \int d^3x \left(\frac{\delta \phi(\vec{y})}{\delta \phi(\vec{x})} \frac{\delta \pi(\vec{z})}{\delta \pi(\vec{x})} - \frac{\delta \phi(\vec{y})}{\delta \pi(\vec{x})} \frac{\delta \pi(\vec{z})}{\delta \phi(\vec{x})} \right)$$

$$= \int d^3x \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}) \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{z}) = \delta^{(3)}(\vec{y} - \vec{z})$$

□

I.4. Lagrangefunktionen einiger wichtiger Felder

allg. Bedingungen an eine Lagrangedichte einer Lorentzinvarianten Feldtheorie:

- Lorentzinvarianz $\Rightarrow \mathcal{L}$ ist $\mathbb{C}$ -Skalar (wrt. Pseudo-Skalar) und unabhängig von x^μ
- lineare Feldtheorie $\Rightarrow \mathcal{L}$ ist höchstens bilinear bzw. quadratisch in Feldern & Ableitungen
- Feldgleichungen höchstens 2. Ordnung
 $\Rightarrow \mathcal{L}$ nur Funktion von ϕ und $\partial_\mu \phi$
- dynamische Größen der Theorie reellwertig
 $\Rightarrow \mathcal{L}$ reell
- lokale Feldtheorie $\Rightarrow \mathcal{L} = \mathcal{L}[\phi(x), \partial_\mu \phi(x)]$
nicht aber von mehreren Ortsvariablen

(A) Klein-Gordon Feld

Skalares, reelles Feld $\phi(x^\nu)$

bilineare Lorentzskalare: $\partial_\nu \phi \partial^\nu \phi$ und ϕ^2

$$\boxed{\mathcal{L}_{\text{KG}} = \frac{1}{2} \partial_\nu \phi \partial^\nu \phi - \frac{m^2}{2} \phi^2}$$

Euler-Lagrange Gleichung

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \phi)} = -m^2 \phi - \frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{\partial \phi}{\partial x_\nu} = 0$$

d.h. $\boxed{(\partial_\nu \partial^\nu + m^2) \phi = 0}$ Klein-Gordon Gleichung

kanonischer Impuls

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \phi)} = \partial^0 \phi = \partial_0 \phi = \dot{\phi}$$

$$\mathcal{H}_{\text{KG}} = \dot{\phi} \pi - \mathcal{L} = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - \frac{1}{2} \partial_j \phi \partial^j \phi + \frac{m^2}{2} \phi^2$$

$$\mathcal{H}_{\text{KG}} = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \phi)^2 + \frac{m^2}{2} \phi^2$$

$$\boxed{H_{\text{KG}} = \frac{1}{2} \int dV (\dot{\phi}^2 + (\vec{\nabla} \phi)^2 + m^2 \phi^2)}$$

(B) elektromagnetisches Feld

Lorentzskalar $F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$

$$\boxed{\mathcal{L}_{\text{EM}} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}} = (\vec{E}^2 - \vec{B}^2)$$

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

kanonische Felder: A^ν bzw A_ν

Euler Lagrange:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} - \frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu A_\mu)} = 0 + \frac{\partial}{\partial x^\nu} F^{\nu\mu} = 0$$

$$\boxed{\partial_\nu F^{\nu\mu} = 0}$$

inhomogene HWGL
ohne externe Ströme

$$\text{bzw } \partial_\nu (\partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu) = 0$$

$$\square A^\mu - \partial^\mu \partial_\nu A^\nu = 0$$

mit äußeren Quellen $\vec{j}_M$ L-Skalar $\vec{j}_\mu A^\mu$

$$\boxed{\mathcal{L}_{ED} \rightarrow \mathcal{L}_{ED} - \vec{j}_\mu A^\mu = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \vec{j}_\mu A^\mu}$$

Euler Lagrange

$$\text{jetzt } \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} = -\vec{j}^\mu \neq 0$$

$$\boxed{\partial_\nu F^{\nu\mu} = \vec{j}^\mu}$$

inhomogene HWGL

Da $F^{\mu\nu}$ antisymmetrisch ist folgt

$$\boxed{\partial_\mu j^\mu = \underbrace{\partial_\mu \partial_\nu}_{\text{symm}} \underbrace{F^{\mu\nu}}_{\text{antisymm}} = 0} \quad \text{Ladungs-erhaltung}$$

Eichtransformation:

Der Feldstärketensor $F^{\mu\nu} = \partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu$ ist invariant unter Eichtransformationen

$$A^\mu \rightarrow \tilde{A}^\mu = A^\mu + \partial^\mu \Lambda(x)$$

da $\tilde{F}^{\mu\nu} = \partial^\nu \tilde{A}^\mu - \partial^\mu \tilde{A}^\nu = \partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu + \underbrace{\partial^\nu \partial^\mu \Lambda - \partial^\mu \partial^\nu \Lambda}_{=0}$

Die Lagrangendichte ist nicht invariant, allerdings ist die Lagrangefunktion nach einer Eichtransformation zur ursprünglichen (kanonisch) äquivalent

$$\begin{aligned} L \rightarrow L' &= \int dV \left(\mathcal{L} - j_\mu \partial^\mu \Lambda(x) \right) && \text{Ladungsdichte} \\ &= \int dV \left(\mathcal{L} - \partial^\mu (j_\mu \Lambda(x)) + \Lambda(x) \partial^\mu j_\mu \right) && \downarrow \\ &= \int dV \left[\mathcal{L} - \underbrace{\partial^\mu (j_\mu \Lambda(x))}_{\substack{\text{Volumenintegral} \\ \text{über 3-Divergenz} \\ \rightarrow \text{Oberflächenterm} \\ = 0}} - \underbrace{\partial^\mu (j_\mu \Lambda(x))}_{\text{Zeitableitung}} \right] \end{aligned}$$

$$L' = L - \frac{d}{dt} \int dV j_0(x,t) A(x)$$

$\Rightarrow$ Die Elektrodynamik ist eichinvariant. Für die Eichinvarianz war wichtig, daß $\partial^\mu j_\mu = 0$ galt, d.h. Ladungserhaltung. Beide Eigenschaften sind in der Tat verknüpft. Die Eichinvarianz ist eine kontinuierliche Symmetrie der eichgeordneten Theorie die die Kopplung geladener Materiefelder (Dirac Feld) an das elm. Feld beschreibt. Eine solche Symmetrie hat nach dem Noether'schen Theorem, dessen Verallgemeinerung auf Felder wir noch kennen lernen werden, eine Erhaltungsgröße zur Folge: die elektrische Ladung. Mehr dazu später.

Beim Übergang zum Hamiltonformalismus stellen wir fest

$$\pi^0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 A^0)} = 0 !$$

D.h. es gibt kein konjugiertes Feld zu A^0 , die Poisson-Klammer zwischen A^0 und π^0 verschwindet!

Eindeutige Lösung der Feldgleichung erfordert die Unbestimmtheit die durch die Eichfreiheit gegeben ist zu beseitigen $\Rightarrow$ Fixierung der Eichung

z.B.	$\partial_\mu A^\mu = 0$	Lorentz-Eichung
oder	$\nabla \cdot \vec{A} = 0, A^0 = 0$	Coulomb-Eichung

Mit Hilfe der Eichfixierung kann das Problem der Sonderrolle von A^0 gelöst werden. $\exists$ verschiedene Verfahren für die verschiedenen Eichungen sinnvoll sind

(i) Eliminierung von A^0 und Coulomb Eichung

$$\text{aus } \partial_\mu F^{\mu 0} = j^0 = \rho$$

$$\Rightarrow \partial_\mu [\partial^\mu A^0 - \partial^0 A^\mu] = -\Delta A^0 - \partial_0 \nabla \cdot \vec{A} = \rho$$

dies vereinfacht sich in Coulomb-Eichung $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ zu

$$\Delta \bar{A}^0 = -\rho$$

$$\text{mit Lösung } A^0(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \int d^3\vec{r}' \frac{\rho(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad \text{Coulomb-Gesetz}$$

Dies eliminiert A^0 aus $\mathcal{L}$ und damit als Feldvariable:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - j_\nu A^\nu$$

$$= -\frac{1}{2} \partial_\mu A^0 (\partial^\mu A^0 - \partial^0 A^\mu) + \frac{1}{2} \partial_\mu A^i (\partial^\mu A^i - \partial^i A^\mu)$$

$$- \rho A^0 + \vec{j} \cdot \vec{A}$$

$$= -\frac{1}{2} \partial_\mu A^0 (\partial^\mu A^0 - \partial^0 A^\mu) + \frac{1}{2} \partial_0 A^i (\partial^0 A^i - \partial^i A^0)$$

$$- \frac{1}{2} \partial_j A^i (\partial_j A^i - \partial_i A^j) - \rho A^0 + \vec{j} \cdot \vec{A}$$

was gilt

$$\vec{B}_k = \varepsilon_{kij} \partial_i A^j$$

und $\vec{B}^2 = \partial_j A^i (\partial_j A^i - \partial_i A^j)$

außerdem ist

$$\partial_j A^0 \partial^j A^0 = \underbrace{\partial_j (A^0 \partial^j A^0)}_{\text{totale 3-er Divergenz}} + A_0 \Delta A^0$$

totale 3-er Divergenz

$$\Rightarrow \text{verschwindet in } L = \int d^3x \mathcal{L}$$

$$\rightarrow -A_0 \Delta A^0 = -A_0 \Box$$

darüberhinaus findet man

$$\partial_j A^0 \partial_0 A^j = \underbrace{\partial_0 (\partial_j A^0 A^j)}_{\text{totale Zeitableitung}} - A^j \partial_0 \partial_j A^0$$

liefert totale Zeitableitung
in L und kann daher
durch kanonische Tröte
beseitigt werden

$$\Rightarrow \mathcal{L} = +\frac{1}{2} \Box A_0 - A^j \partial_0 \partial_j A^0 + \frac{1}{2} \partial_0 A^i \partial_0 A^i \\ - \frac{1}{2} \vec{B}^2 - \Box A_0 + \vec{j} \cdot \vec{A}$$

was ist $j_k - \partial_0 \partial_k A^0$?

zeigen: $\vec{j}_\perp = \vec{j} - \partial_0 \vec{\nabla} A^0$

Bew: $\vec{\nabla} \cdot \vec{j}_\perp = \vec{\nabla} \cdot \vec{j} - \partial_0 \Delta A^0$

$$= \vec{\nabla} \cdot \vec{j} - \partial_0 \rho = 0 \quad \square$$

damit ergibt sich endgültig in Coulomb Eichung

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (E_\perp^2 - B_\perp^2) - \frac{1}{2} \rho A_0 + \vec{j}_\perp \cdot \vec{A}_\perp$$

Weder E , noch B , hängen von A_0 ab. Eliminierung von A_0 mittels des Coulombschen Gesetzes liefert schließlich für die Lagrangefunktion

$$L = \int d^3r \mathcal{L} = \int d^3r \left\{ \frac{1}{2} (E_\perp^2 - B_\perp^2) + \vec{j}_\perp \cdot \vec{A}_\perp \right\} - \frac{1}{8\pi} \int d^3r \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}, t) \rho(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Lagrangefunktion des elm. Feldes in Coulomb-Eichung

Bem: Man hätte A^0 auch in der Lorentzeichung aus $\mathcal{L}$ eliminieren können. Dann wäre

$$\square A^0(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r}, t) \quad \square = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$$

Dann wären aber nichtlokale Terme in der Zeit in der Lagrangedichte aufgetreten

Hamiltonformalismus

Felder: $A'_i(\vec{r}, t) = A^i(\vec{r}, t)$

konjugierte Impulse $\pi'_i(\vec{r}, t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 A^i)} = \frac{\partial A^i}{\partial t} = -E^i_{\perp}$

Hamiltonfunktion des elm. Feldes in Coulomb-Normierung

$$\begin{aligned} H &= \int d^3r \, \vec{\pi} \cdot \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - L = \\ &= \int d^3\vec{r} \left\{ \frac{1}{2} (E_{\perp}^2 + B_{\perp}^2) - \vec{j}_{\perp} \cdot \vec{A}_{\perp} \right\} \\ &\quad + \frac{1}{8\pi} \int d^3r \int d^3r' \frac{\rho(r, t) \rho(r', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \end{aligned}$$

Die fundamentalen Poissonklammern für transversale Felder sind (siehe ü.A.)

$$\{A^i(\vec{r}, t), \pi^j(\vec{r}', t)\} = \delta_{\perp}^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}') \delta^i_j$$

Eine alternative Methode das Problem mit π^0 loszuwerden ist:

(ii) Addition eines eichfixierenden Terms zur Lagrangedichte und Lorentzbeziehung

Falls man Lorentzbeziehung wählt, d.h.,

$$\partial_\mu A^\mu = 0$$

kann zur Lagrangedichte ein Term

$$L_g = -\frac{1}{2\alpha} (\partial_\mu A^\mu) (\partial_\nu A^\nu)$$

hinzugaddiert werden ohne die Physik zu ändern.

Setzt man umgekehrt zunächst von der Lorentzbeziehung ab, enthält $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} + L_g$ $\partial_\mu A^\mu$ und damit

ist $\pi^0 \neq 0$. Damit lassen sich alle 4 Feldkomponenten quantisieren und man muß die Lorentzbeziehung später einbauen z.B. durch eine Forderung an die erlaubten Zustände im Hilbertraum (Gupta-Bleuler Formalismus). Der Faktor α ist noch frei.

Bem.:

Die Bewegungsgleichungen der Felder hängen von der Wahl der Eichung ab, die physikalischen Ergebnisse aber nicht!

(C) Dirac Feld

Die Lagrangedichte des Dirac Feldes darf erste Ableitungen nur linear enthalten.

Lorentzskalare die linear in den Ableitungen sind

$$\bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi \quad \text{und} \quad (\partial_\mu \bar{\psi}) \gamma^\mu \psi$$

Massenform

$$m \bar{\psi} \psi$$

Man findet

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} \left[\frac{i}{2} \overleftrightarrow{\gamma^\mu \partial_\mu} - m \right] \psi$$

Lagrange-
dichte des
Dirac Feldes

wobei

$$\overleftrightarrow{\partial_\mu} \equiv \overrightarrow{\partial_\mu} - \overleftarrow{\partial_\mu}$$

$$\text{d.h.} \quad \bar{\psi} \gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial_\mu} \psi = \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - (\partial_\mu \bar{\psi}) \gamma^\mu \psi$$

Da ψ ein komplexwertiges Feld ist muß man ψ und $\bar{\psi}$ als unabhängige Felder betrachten. (siehe U.A.)
Daraus ergibt sich z.B.

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\psi})} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} = (-i \gamma^\mu \partial_\mu + m) \psi = 0$$

d.h. die Diracgleichung für ψ . Analog erhält man

die entsprechende Gleichung für $\bar{\psi}$.

Hamiltonformalisierung

$$\bar{\pi} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \psi)} = \frac{i}{2} \bar{\psi} \gamma^0 = \frac{i}{2} \psi^\dagger$$

$$\pi \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \bar{\psi})} = -\frac{i}{2} \gamma^0 \psi$$

Bem. $\bar{\pi}$ ist ein Zeilenvektor, π ein Spaltenvektor

Die Konvention ist daher den konjugierten Impuls zu ψ als $\bar{\pi}$ zu bezeichnen

$$\mathcal{H} = \bar{\pi} \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial t} \pi - \mathcal{L} = \frac{i}{2} \bar{\psi} \gamma^0 \overleftrightarrow{\frac{\partial}{\partial t}} \psi - \mathcal{L}$$

$\nearrow \quad \uparrow \quad \nearrow \quad \uparrow$
 Zeile Spalte Zeile Spalte

$$\mathcal{H} = \bar{\psi} \left[-\frac{i}{2} \gamma^j \overleftrightarrow{\frac{\partial}{\partial x^j}} + m \right] \psi = \psi^\dagger \left[-\frac{i}{2} \alpha_j \overleftrightarrow{\frac{\partial}{\partial x^j}} + \beta m \right] \psi$$

α_j, β = Dirac Matrizen.

$$H = \int d^3r \mathcal{H} = \int d^3r \psi^\dagger \left[-i \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + \beta m \right] \psi$$

$\uparrow$
 phys. Zeit

fundamentale Poissonklammern

$$\left\{ \psi_\alpha(\vec{r}, t), \bar{\psi}_\beta(\vec{r}', t) \right\}_P = \delta_{\alpha\beta} \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}')$$

Invarianz unter Phasentransformation

Dirac Feld ist komplexwertig, die Lagrange dichte ist aber bilinear in ψ und $\bar{\psi}$. Daher ist $\mathcal{L}$ invariant unter einer globalen Phasentransformation

$$\psi(x^\mu) \rightarrow e^{i\theta} \psi(x^\mu)$$

globale Eichphaseninvarianz

Wir werden jetzt sehen, daß diese kontinuierliche Symmetrie eine Erhaltungsgröße zur Folge hat.

I.5 Noether Theorem für Felder

Aus der klassischen Mechanik wissen wir daß kontinuierliche Symmetrien der Lagrangefunktion Erhaltungsgrößen zur Folge haben (Noether Theorem). Dies läßt sich auf Felder verallgemeinern

Noether Theorem

Für jede kontinuierliche Transformation der Koordinaten und Felder die die Wirkung über jedes endliche Volumen invariant lassen $\exists$ eine Funktion der Felder und ihrer Ableitungen die eine Konstante der Bewegung ist.

Sei ε ein infinitesimaler Parameter, die die Transformation charakterisiert, d.h.

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \lambda^\mu(x) \varepsilon$$

$$\varphi_\mu(x) \rightarrow \varphi'_\mu(x') = \varphi_\mu(x) + \lambda_\mu(x) \varepsilon$$

dann gilt

(*)

$$\partial_\mu O^\mu = 0$$

Kontinuitätsgleichung

wobei

$$O^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi_\alpha)} \left[\frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial x^\nu} \lambda^\nu - \lambda_{\alpha i} \right] - \mathcal{L} \lambda^\mu$$

Die (*) zugeordnete erhaltene Ladung

(Noether Ladung) ist

$$Q \equiv \int d^3r \, \mathcal{O}^0(\vec{r}, t) = \text{konst}_t$$

Beweis: $\mathcal{L}(x) \rightarrow \mathcal{L}'(x')$ infinit. Trafo

$$S_{v'} = \int_{v'} d^4x' \mathcal{L}'(x') \stackrel{!}{=} S_v = \int_v d^4x \mathcal{L}(x)$$

$$0 = S_{v'} - S_v = \int_{v'} d^4x' (\mathcal{L}'(x') - \mathcal{L}(x'))$$

$$+ \int_{v'} d^4x' \mathcal{L}(x') - \int_v d^4x \mathcal{L}(x)$$

$$= \int_v d^4x (\mathcal{L}'(x) - \mathcal{L}(x)) - \int_v d^4x \mathcal{L}(x)$$

1. Ordnung
in ε

$$+ \int_v d^4x \det\left(\frac{\partial x'^M}{\partial x^\nu}\right) \left(\mathcal{L}(x) + \frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial x^\mu} \lambda^\mu \varepsilon'\right)$$

Jacobi-Def.

man ist in 1. Ordnung in ε'

$$\det\left(\frac{\partial x'^M}{\partial x^\nu}\right) = \det\left(1 + \frac{\partial \lambda^\mu(x)}{\partial x^\nu} \varepsilon'\right)$$

$$\approx 1 + \partial_\mu \lambda^\mu(x) \varepsilon$$

außerdem ist in 1. Ordnung in ε

$$\mathcal{L}'(x) - \mathcal{L}(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_\alpha} \delta \psi_\alpha + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi_\alpha)} \delta (\partial_\mu \psi_\alpha)$$

$$\delta \psi_\alpha = \psi'_\alpha(x) - \psi_\alpha(x) = \underbrace{\psi'_\alpha(x) - \psi'_\alpha(x')}_{-\frac{\partial \psi'_\alpha}{\partial x^\mu} \delta x^\mu} + \underbrace{\psi'_\alpha(x') - \psi_\alpha(x)}_{\mathcal{R}_\alpha \varepsilon}$$

$$= \left(-\frac{\partial \psi_\alpha}{\partial x^\mu} \lambda^\mu + \mathcal{R}_\alpha \right) \varepsilon$$

$$\delta (\partial_\mu \psi_\alpha) = \partial_\mu (\delta \psi_\alpha) = \partial_\mu \left(-\frac{\partial \psi_\alpha}{\partial x^\nu} \lambda^\nu + \mathcal{R}_\alpha \right) \varepsilon$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}'(x) - \mathcal{L}(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_\alpha} \left(\mathcal{R}_\alpha - \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial x^\nu} \lambda^\nu \right) \varepsilon + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi_\alpha)} \partial_\mu \left(\mathcal{R}_\alpha - \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial x^\nu} \lambda^\nu \right) \varepsilon$$

somit

$$0 = \int_V d^4x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_\alpha} \left(\mathcal{R}_\alpha - \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial x^\nu} \lambda^\nu \right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi_\alpha)} \partial_\mu \left(\mathcal{R}_\alpha - \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial x^\nu} \lambda^\nu \right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} \lambda^\mu + \mathcal{L} \partial_\mu \lambda^\mu \right\} \varepsilon$$

Jetzt verwenden wir die Euler-Lagrange Gleichungen (Feldgleichungen)

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_\alpha} = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi_\alpha)} \right)$$

um den Integranden als 4-Divergenz zu schreiben

$$(*) \quad - \int_V d^4x \quad \partial_\mu O^M = 0$$

wobei
$$O^M = - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi_\alpha)} \left(\frac{\partial \psi_\alpha}{\partial x^\mu} \eta^\mu - \mathcal{L} \right) - \mathcal{L} \eta^\mu$$

Da (*) für jedes Volumen V gelten soll, muß die lokale Relation

$$\partial_\mu O^M = 0 \quad \text{gelten} \quad \square$$

ÜA: Man zeige, daß für Translationen

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \frac{\partial \phi}{\partial x^\nu} - g^{\mu\nu} \mathcal{L}$$

ein divergenzfreier Strom ist. Was sind die zugehörigen erhaltenen Noether-Ladungen im Falle des elm. Feldes?

Eichphaseumtransformationen

Koordinaten bleiben unverändert $x \rightarrow x' = x$

infinitesimale Transformation der Felder

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = e^{-iq\epsilon} \psi(x)$$

$$\approx \psi(x) - iq\epsilon \psi(x)$$

d.h. $\boxed{\mathcal{L}' = 0 \quad \mathcal{L} = -iq\epsilon \psi(x)}$

$$O^M = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)} \Omega = iq \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)} \psi$$

erhaltene 4-Strom

Bspl.: Dirac-Feld $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)} = \frac{i}{2} \bar{\psi} \gamma^\mu$ analog $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \bar{\psi})}$

Summe $\boxed{O^M = -q \bar{\psi} \gamma^\mu \psi = -j_D^M}$

$\Rightarrow$ Die kontinuierliche Phasensymmetrie für Lagrange-dichten komplexwertiger Felder wie der Dirac Felder hat die Ladungserhaltung

$$\boxed{\partial_\mu j_D^M = 0}$$

zur Folge !

I.6 Lokale Eichphasentransformation

wir hatten gesehen, daß die Dirac Theorie wie auch andere Feldtheorien komplexwertiger Felder unter einer globalen Phasentransformation

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = e^{iq\theta} \psi(x)$$

invariant ist. Es stellt sich die Frage ob dies auch unter einer lokalen Phasentransformation mit $\theta = \theta(x^\mu)$ der Fall ist?

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = e^{iq\theta} \psi(x)$$

lokale Trafo für Dirac-Feld $\bar{\psi}' = e^{-iq\theta} \bar{\psi}$

$$\begin{aligned} L_0 \rightarrow L_0' &= \frac{1}{2} \bar{\psi}' (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi' + \frac{1}{2} \bar{\psi}' (-i\gamma^\mu \overleftarrow{\partial}_\mu - m) \psi' \\ &= L_0 + q \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \partial_\mu \theta \neq L_0 \end{aligned}$$

Falls $\partial_\mu \theta \neq 0$ bleibt die Lagrangedichte unter lokalen Phasentransformationen nicht invariant.

Damit eine Invarianz gegeben ist benötigen wir eine Kopplung an ein Vektorfeld A^μ

$$L_0 \rightarrow L = L_0 - j^\mu A_\mu$$

welches bei einer Phasentransformation von ψ einer Eichtransformation unterzogen wird

$$(*) \quad \left[\begin{array}{l} \psi \rightarrow \psi'(x) = e^{i q \theta(x)} \psi(x) \\ A_\mu \rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu \theta(x) \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} \text{lokale} \\ \text{Eichphasen-} \\ \text{transformation} \end{array} \right.$$

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L}_0' - j^M A'_\mu = \mathcal{L}_0 - j^M A_\mu = \mathcal{L}$$

Nimmt man für das Vektorfeld, daß auch Eichfeld genannt wird, als Lagrangedichte an

$$\mathcal{L}_F = \alpha F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

die invariant unter Eichtransformationen ist, gilt:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_F + \mathcal{L}_{\text{WW}} \quad \mathcal{L}_{\text{WW}} = -j^M A_\mu$$

ist invariant unter lokalen Eichphasentransformationen. Man spricht von einer lokalen Eichsymmetrie. Feldtheorien mit einer solchen Symmetrie heißen Eichfeldtheorien und haben eine besondere Bedeutung. Wichtig ist hierbei, daß sich die Kopplung $\mathcal{L}_{\text{WW}}$ natürlich aus der Forderung nach lokaler Eichsymmetrie ergab.

Wenn $\psi(x)$ das Dirac Feld darstellt und A^μ das 4-Potential des elektromagnetischen Feldes

erhalten wir aus der Forderung nach lokaler
Eichsymmetrie die Lagrangedichte des gekoppelten
Maxwell-Dirac feldes

$$\mathcal{L}_{\text{MWD}} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \bar{\psi} (i \gamma^\mu \overset{\rightarrow}{\partial}_\mu - m) \psi - g \bar{\psi} \gamma^\mu \psi A_\mu$$

Maxwell-Dirac
Feld

Man erkennt, daß man den Wechselwirkungsterm
aus dem Dirac Term generieren kann, wenn man
setzt

$$\begin{aligned} \overset{\rightarrow}{\partial}_\mu &\rightarrow \vec{D}_\mu \equiv \overset{\rightarrow}{\partial}_\mu + i g A_\mu \\ \overset{\leftarrow}{\partial}_\mu &\rightarrow \overset{\leftarrow}{D}_\mu \equiv \overset{\leftarrow}{\partial}_\mu - i g A_\mu \end{aligned}$$

Prinzip der minimalen Kopplung

Die $\vec{D}_\mu$ und $\overset{\leftarrow}{D}_\mu$ heißen kovariante Ableitungen.

— $\mathcal{L}_{\text{MWD}}$ bildet die Grundlage der
Quantenelektrodynamik

I.7 Abelsche und nicht Abelsche Eichfeldtheorien

wir hatten gerade am Beispielen Maxwell-Dirac Feldes (QED) gesehen, daß die Forderung nach lokaler Eichphaseninvarianz die (minimale) Struktur der Theorie vollkommen festlegt. Wir wollen dies jetzt etwas verallgemeinern

(A) Abelsche Eichfeldtheorie

Abelsche Eichfeldtheorie $\Leftrightarrow \exists$ kontinuierliche Symmetrie die die Struktur der $U(1)$ hat

reelle Felder

$$\phi \rightarrow \phi' = \phi$$

komplexe Felder

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \rightarrow \psi' = \begin{pmatrix} \psi'_1 \\ \psi'_2 \end{pmatrix} = \psi e^{-iq\theta(x)}$$

$$\bar{\psi} = (\bar{\psi}_1 \dots \bar{\psi}_n) \rightarrow \bar{\psi}' = (\bar{\psi}'_1 \dots \bar{\psi}'_n) = \bar{\psi} e^{+iq\theta(x)}$$

Eichphasensymmetrie erfordert, daß Ableitungen in der Lagrangendichte zusammen mit einem Eichfeld A_μ auftreten

$$\vec{\partial}_\mu \rightarrow \vec{D}_\mu = \vec{\partial}_\mu + iq A_\mu$$

und daß sich das Eichfeld bei einer lokalen Phasentransformation gemäß

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu \theta(x)$$

transformiert. Darüberhinaus muß der freie Lagrangean des Eichfeldes invariant unter der Eichtransformation sein.

allgemeinste Struktur von $\mathcal{L}_{EF}$

$$\mathcal{L}_{EF} = \lambda_1 F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \lambda_2 G_{\mu\nu} G^{\mu\nu} + m^2 A^\mu A_\mu$$

Eichinvarianz erfordert

$$\lambda_2 = 0 \quad m^2 = 0 \quad (\text{siehe ü. A.})$$

Man erkennt sofort, daß $F_{\mu\nu}$ mit kovarianten Ableitungen geschrieben werden kann

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = (\partial_\mu + iq A_\mu) A_\nu \\ &\quad - (\partial_\nu + iq A_\nu) A_\mu \end{aligned}$$

$$\boxed{F_{\mu\nu} = D_\mu A_\nu - D_\nu A_\mu}$$

(B) Nicht-Abelsche Eichfeldtheorien

betrachten geladene (Spinor)felder mit mehreren
internen Freiheitsgraden (z.B. Isospin, color, ...).
(Vorsicht: nicht verwechseln mit den Komponenten
des Spinors!)

n innere Freiheitsgrade

Verallgemeinerung der Phasentransformation:
unitäre $n \times n$ Matrix ($\underline{U}$ wirkt nicht im Raum der
Spinorkomponenten)

$$\underline{\psi}'(x) = \underline{U}(x) \underline{\psi}(x) \quad \underline{U}: n \times n \text{ Matrix}$$

$\underline{U}(x)$ kann geschrieben werden als Produkt aus $U(1)$
Phasenfaktor und $SU(n)$ Matrix

$$\underline{U}(x) = e^{-i g \frac{1}{2} \underline{\lambda}_j \theta_j}$$

θ_j - verallgemeinerte Winkel

$\frac{1}{2} \underline{\lambda}_j$ - Generatoren der $SU(n)$ ($n \times n$) Matrizen

$$\text{Tr} \{ \underline{\lambda}_a, \underline{\lambda}_b \} = 2 \delta_{ab}$$

$$[\underline{\lambda}_a, \underline{\lambda}_b] = i f_{abc} \underline{\lambda}_c$$

f_{abc} - Strukturkonstanten der $SU(n)$

Bspl.: $SU(2)$

$\underline{\lambda}_i = \underline{\sigma}_i$
Pauli-matrizen

$i=1,2,3$

Lagrangedichte des geladenen Feldes

$$\mathcal{L}_F = \sum_{e=1}^n \bar{\psi}^{(e)} \left[i \frac{1}{2} \gamma^\mu \partial_\mu - m \right] \psi^{(e)}$$

erhaltene Strome aufgrund der Symmetrie gegen-
über globalen Phasentransformationen:

$$\psi \equiv \begin{pmatrix} \psi^{(1)} \\ \vdots \\ \psi^{(n)} \end{pmatrix} \quad \text{analog } \bar{\psi}$$

Bem.: $\psi^{(1)}, \dots, \psi^{(n)}$ haben natürlich noch
jeweils Spinorkomponenten

$$\bar{j}^\mu_e = g \bar{\psi} \gamma^\mu \lambda_e \psi$$

lokale Phasentransformation

$$\mathcal{L}_F \rightarrow \mathcal{L}_F' = \mathcal{L}_F + \bar{\psi} i \gamma^\mu \underline{U}^\dagger (\partial_\mu \underline{U}) \psi$$

$\Rightarrow$ Eichfeld $n \times n$ Matrix!

$$\underline{A}_\mu(x) = \frac{1}{2} \lambda_a A_\mu^a(x)$$

da $SU(n)$ $n^2 - 1$ Generatoren hat
 $\Rightarrow$

$\exists$ $n^2 - 1$ Eichfelder $A_\mu^a(x)$

d.h. $a = 1, \dots, n^2 - 1$

Kovariante Ableitung

$$\boxed{\underline{\underline{D}}_\mu \psi(x) = \underline{\underline{\partial}}_\mu \psi(x) + i g \underline{\underline{A}}_\mu(x) \psi(x)}$$

Spaltenvektor
aus n Spinoren

$\Rightarrow$ Wechselwirkungs-Lagrangian

$$\boxed{\mathcal{L}_{ww} = - g \bar{\psi} \gamma^\mu \underline{\underline{A}}_\mu \psi}$$

Spaltenvektor aus
 n Spinoren

betrachten wir nun das freie Lagrangedichte der Eichfelder

$$\underline{\underline{F}}_{\mu\nu} = \underline{\underline{\partial}}_\mu \underline{\underline{A}}_\nu - \underline{\underline{\partial}}_\nu \underline{\underline{A}}_\mu \quad \Downarrow \text{ nicht eichinvariant}$$

$$\boxed{\underline{\underline{F}}_{\mu\nu} = \underline{\underline{D}}_\mu \underline{\underline{A}}_\nu - \underline{\underline{D}}_\nu \underline{\underline{A}}_\mu} \quad !$$

dies ist im Gegensatz zur QED nicht mehr dasselbe, denn

$$\underline{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \underline{A}_\nu + ig \underline{A}_\mu \underline{A}_\nu - \partial_\nu \underline{A}_\mu - ig \underline{A}_\nu \underline{A}_\mu$$

$$\Rightarrow \boxed{\underline{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \underline{A}_\nu - \partial_\nu \underline{A}_\mu + ig [\underline{A}_\mu, \underline{A}_\nu]} \quad (*)$$

Feldstärketensor ($n \times n$ Matrix in internen
der $SU(n)$ Freiheitsgraden, Tensor 2. Stufe
Eichfelder in Lorentzindizes)

eichinvariante Lagrangedichte

$$\boxed{\mathcal{L}_{\text{Eich}} = -\frac{1}{2} \text{Tr} \{ \underline{F}_{\mu\nu} \underline{F}^{\mu\nu} \}}$$

wobei die Spur ^{ist} über die n internen Freiheitsgrade erstreckt

- Aufgrund des nichtlinearen Kommutatorterms in (*) ist die eichinvariante Lagrangedichte einer nicht-abelschen Eichfeldtheorie nicht mehr quadratisch bzw. bilinear in den Eichfeldern

$\Rightarrow$ inhärente Selbstkopplung (Nichtlinearität)
für nicht-abelsche Eichfelder