

Lit.: Franz Gross "Relativistic Quantum Mechanics & Field Theory" Wiley 2008
(© 1993) $\hbar = c = 1$

F. Mandl, G. Shaw "Quantum Field Theory" Wiley
2006 (© 1984)

0. Einleitung

• Warum eine Quantentheorie der Felder?

Unzulänglichkeiten des bisherigen Theoriegebäudes:

(i) klassische Theorie:

$$\vec{E} = -\frac{1}{g} m \ddot{\vec{r}}_g$$

Felder $\Leftrightarrow$ Kraftwirkung auf
Massenpunkte mit
"Ladung" g

Quantenmechanik:

$$\vec{r}_g \rightarrow \hat{\vec{r}}_g \rightarrow \vec{E} ??$$

(ii) relativistische Quantenmechanik nicht konsistent
als 1-Teilchentheorie interpretierbar

• Was ist ein Quantenfeld?

klass. Feld:

$$\mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$$

$$\vec{r}, t \quad \phi(\vec{r}, t)$$

Quantenfeld $\mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R} \rightarrow L(\mathcal{H})$
 $\vec{r}, t$

d.h. der Ort der in der Quantenmechanik die Rolle eines Operators hatte wird hier zusammen mit der Zeit zu einem kontinuierlichen Index

$$\underbrace{\vec{q}_i}_{\text{diskreter Index}} \rightarrow \underbrace{\hat{O}(x)}_{\text{kontinuierlicher Index}} \quad x \in \mathbb{R}^3$$

Bem: Der Übergang zum Kontinuum ist das was uns am meisten zu schaffen machen wird!

- Wie wird eine Quantentheorie der Felder aussehen?

Quantenfeldtheorie ist vom Prinzip eine Quantentheorie
d.h. es gelten alle Postulate der Quantentheorie

- System wird beschrieben durch Zustandsvektor $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$ (bzw. Verallg.)
- Observable sind selbstadjungierte lineare Operatoren auf $\mathcal{H}$ $\hat{O}: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H} \in L(\mathcal{H})$
- Messung einer Observable führt zu einer Projektion des Zustandsvektors auf den der Meßgröße zugeordneten Unterraum

- Zeitentwicklung wird durch einen unitären Operator der Zeittranslation beschrieben deren Generator der Hamiltonoperator $\hat{H}$ ist: $\hat{U}(t, t_0) = e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H} (t - t_0)}$
- Observable lassen sich auf einen fundamentalen Satz von Operatoren zurückführen mit bestimmten fundamentalen Vertauschungsrelationen

Zur Konstruktion einer konsistenten Quantentheorie der Felder werden wir uns der Analogie zwischen klassischer (nicht relativistischer) und (nicht relativistischer) Quantenmechanik bedienen

klass. Mechanik

Quantenmechanik

$$L(q_i, \dot{q}_i, t)$$

$$H = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L$$

$$\hat{H}$$

$$q_i, p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

$$\hat{q}_i, \hat{p}_i$$

$$\{q_i, q_j\} = \{p_i, p_j\} = 0$$

$$[\hat{q}_i, \hat{q}_j] = [\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0$$

$$\{q_i, p_j\} = \delta_{ij}$$

$$[\hat{q}_i, \hat{p}_j] = i\hbar \delta_{ij}$$

$$\dot{q}_i = \{q_i, H\}$$

$$\frac{d}{dt} \hat{q}_i = -\frac{i}{\hbar} [\hat{q}_i, \hat{H}]$$

$$\dot{p}_i = \{p_i, H\}$$

$$\frac{d}{dt} \hat{p}_i = -\frac{i}{\hbar} [\hat{p}_i, \hat{H}]$$

bzw. $f = f(q_i, p_i, t)$

$$\frac{d}{dt} f = \{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

$$\frac{d}{dt} \hat{f} = -\frac{i}{\hbar} [\hat{f}, \hat{H}] + \frac{\partial \hat{f}}{\partial t}$$

$\Rightarrow$ dazu benötigen wir eine Formulierung klassischer Feldtheorien im Rahmen des Lagrange-Hamilton Formalismus

Fundamentale Quantenfeldtheorien sind relativistisch, d.h. Lorentzinvarianz wird eine große Rolle spielen.

Da wie wir sehen werden, im Hamiltonformalismus für Felder die Zeitkoordinate eine ausgezeichnete Rolle spielt, ist dieser nicht explizit kovariant. Wir werden eine alternative Methode der Quantisierung kennenlernen, die lediglich auf die Lagrangefunktion zurückgreift und ohne Hilbertraum auskommt, die Pfadintegral-Quantisierung nach Feynman.

Wir werden sehen, daß eine mathematisch konsistente Formulierung einer Quantenfeldtheorie auf einige z.T. große Schwierigkeiten stößt. Bei der Berechnung

physikalischen Größen werden oft divergente Beiträge auftreten. Wir werden sehen daß diese manchmal, aber nicht immer beseitigbar sind durch ein Verfahren, daß wir Renormierung nennen. Dabei wird eine spezielle Klasse von relativistischen Feldtheorien eine besondere Rolle spielen. Dies sind sog. Eichfeldtheorien. Sie weisen eine spezielle Symmetrie^{auf}, die Invarianz unter lokalen Eichtransformationen, und sind renormierbar. Alle in der Natur beobachteten Wechselwirkungen lassen sich auf Eichfeldtheorien zurückführen.

- Welche neuen fundamentalen physikalischen Effekte werden durch die Quantenfeldtheorie vorhergesagt?

Während die Energie eine Erhaltungsgröße ist, wird dies nicht mehr für die Teilchenzahlen gelten

→ i.A. keine Teilchenzahlerhaltung

Paare von Teilchen können erzeugt bzw. vernichtet werden

Teilchen mit großer Masse können spontan in solche mit geringerer Masse zerfallen.

Im nichtrelativistischen Grenzfall bleibt die Teilchenzahl erhalten. Dieser Grenzfall entspricht der Vielteilchentheorie.

Wie in der Vielteilchenquantenmechanik wird es Quantenfelder mit bosonischem und fermionischem Charakter geben.

- Ist die QFT die Weisheit letzter Schluss?

nein!

ungelöst:

- Quantisierung des Gravitationsfeldes
- Erklärung der Massen der fundamentalen Elementarteilchen

- Aufbau der Vorlesung

I) klass. Feldtheorie

(Lagrange-Hamilton, Symmetrien und Erhaltungssätze, Schrödinger- und Dirac Quantenmechanik als klass. Feldtheorie, Eichfelder)

II) kanonische Quantisierung von Feldern

III) einige wichtige Resultate für freie Quantenfelder

IV) Pathintegral Quantisierung

V) QED mit Wechselwirkung: Störungstheorie

VI) Renormierung

- Konvention:

$$\hbar = c = 1$$