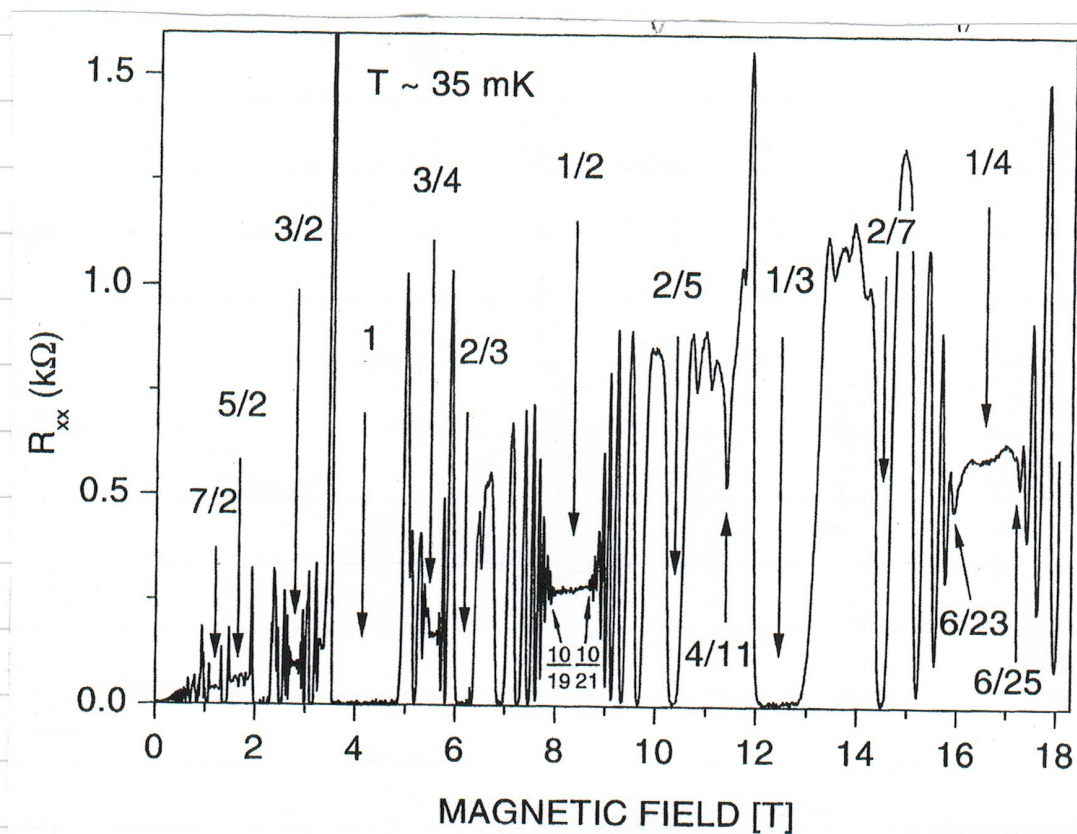


J. Fraktionaler Quanten-Hall Effekt and composite-fermion theory

kurz nach der Entdeckung des IQHE beobachteten
Tsui, Störmer und Gossard quantisierte Hall Plateaus

$$\sigma_H = f \frac{e^2}{h}$$

bei größeren Magnetfeldern die bestimmten fraktionales
Füllungen (hauptsächlich) kleiner als 1 entsprechen



Die meisten fraktionales Plateaus sind von der
Struktur

$$f = \frac{n}{2n+1}$$

Der FQHE kann nur mit Wechselwirkungen verstanden werden

9.1. Haldane's Pseudopotentiale

Bei hinreichend starkem Magnetfeld reicht es aus

(i) nur eine Spinkomponente zu betrachten $\rightarrow$ Zeemanaufspaltung

(ii) sich auf die Physik im LLL zu beschränken

Betrachten 2-Teilchenproblem in 2D im äußeren Magnetfeld

$$(9.1) \quad H = \hat{H}_1 + \hat{H}_2 + \hat{V} = H_0 + V$$

$$(9.2) \quad H_i = \frac{1}{2m} \left(\vec{p}_i + \frac{e}{c} \vec{A}(\vec{r}_i) \right)^2 \quad V = V(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)$$

komplexe Koordinaten

$$x_i, y_i \rightarrow z_i, z_i^*$$

Schwerpunkts- und Relativkoordinaten

$$Z = \frac{1}{2}(z_1 + z_2) \quad z = z_1 - z_2$$

$$H = \frac{1}{2} \left[-4\ell_r^2 \frac{\partial^2}{\partial z \partial z^*} + \frac{1}{4\ell_r^2} z z^* - z \frac{\partial}{\partial z} + z^* \frac{\partial}{\partial z^*} \right]$$

Schwerpunkt

$$+ \frac{1}{2} \left[-4\ell_r^2 \frac{\partial^2}{\partial z \partial z^*} + \frac{1}{4\ell_r^2} z z^* - z \frac{\partial}{\partial z} + z^* \frac{\partial}{\partial z^*} \right]$$

Relativbewegung

$$+ V(z, z^*)$$

$$(9.3) \quad \boxed{\ell_R = \frac{1}{\sqrt{2}} \ell_m} \quad \boxed{\ell_r = \sqrt{2} \ell_m}$$

Separation von Schwerpunkt und Relativbewegung

$$\begin{array}{lll} \hat{a}_R, \hat{a}_R^+ & ; & \hat{b}_R, \hat{b}_R^+ \quad \text{SP} \\ \hat{a}, \hat{a}^+ & ; & \hat{b}, \hat{b}^+ \quad \text{Relativ} \end{array}$$

$$\underline{LLL} \quad \hat{a}_R^+ \hat{a}_R, \hat{a}^+ \hat{a} \rightarrow 0$$

vollständige Satz von Zuständen im LLL

$$(9.4) \quad |M, m\rangle = \frac{(\hat{b}_R^+)^M (\hat{b}^+)^m}{\sqrt{M! m!}} |0, 0\rangle$$

Zweiteilchenwellenfunktion im LL

$$\psi_{Mm}^{\text{LL}}(z, \bar{z}) \sim \frac{1}{z} z^M \bar{z}^m \exp \left\{ -\frac{z z^*}{4\epsilon r^2} - \frac{\bar{z} \bar{z}^*}{4\epsilon r^2} \right\}$$

Projektion der 2-Teilchenwechselwirkung auf das niedrigste Landau-Niveau

$$P V(r) P = \sum_{m, M} \sum_{m', M'} |M'm'\rangle \langle M'm'| V |Mm\rangle \langle Mm|$$

hier ist $V = V(|z|) \Rightarrow$

$$\langle M'm'| V |Mm\rangle = \delta_{MM'} \delta_{mm'} \langle m| V |m\rangle$$

$$P V(r) P = \sum_{m, M} |Mm\rangle \langle Mm| V_m$$

$$(9.5) \quad \boxed{V_m = \langle m| V |m\rangle} \quad \text{Haldane's Pseudopotential}$$

z.B. gilt für die Coulomb-Wechselwirkung $V(r) = \frac{1}{r}$

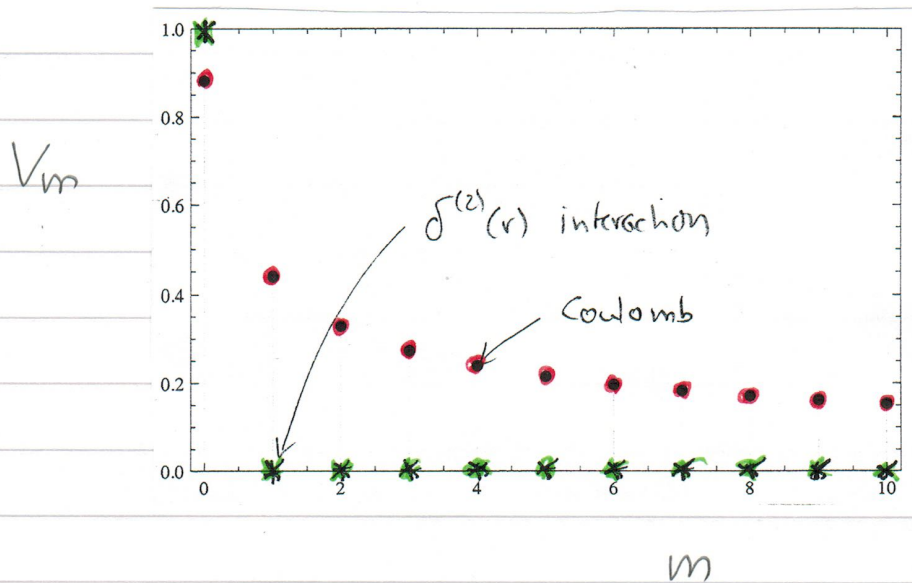
$$(9.6) \quad \boxed{V_m^c = \frac{1}{2\ell m} \frac{\Gamma(m + \frac{1}{2})}{\Gamma(m+1)}} \quad V(r) = \frac{1}{r}$$

während für eine Punktwechselwirkung

(9.7)

$$V_0 = 1 \quad V_2 = V_3 = V_4 = \dots \equiv 0$$

$$V(r) = \delta(r)$$



9.2. Laughlins Wellenfunktionen

Die Einteilchenwellenfunktionen im LLL mit Drehimpuls (in z-Richtung) l sind ($l_m = 1$)

$$(9.8) \quad \psi_l(z) = (2\pi 2^l l!)^{-1/2} z^l e^{-\frac{1}{4}|z|^2}$$

Die Vielteilchenwellenfunktion hat daher die Struktur

$$(9.9) \quad \Psi = F_A[\{z_j\}] \exp\left\{-\frac{1}{4} \sum_j |z_j|^2\right\}$$

F_A muß anti-symmetrisch sein und sollte nur eine Funktion der Differenzen sein

(i) Motiviert durch Erfolg von Jastrow-artigen Wellenfunktionen zur Beschreibung von SF-He

$$F_A[\{z_j\}] = \prod_{j < k} f(z_j - z_k)$$

(ii) ψ muß Eigenzustand des totalen Drehimpulses sein, d.h.,

$$\prod_{j < k} f(z_j - z_k) \quad \text{Polynom in } z_j \text{ von Ordnung } L$$

$$(z_j \rightarrow z_j e^{-i\theta} \Rightarrow \psi \rightarrow \psi e^{-iL\theta})$$

d.h. $f(z_j - z_k)$ muß festen Drehimpuls haben

$$(iii) \quad f(-z) = -f(z)$$

$\Rightarrow$

$$f(z) = z^m \quad m \text{ ungerade}$$

$$(9.10) \quad \psi_{\frac{1}{m}} = \prod_{j < k} (z_j - z_k)^m \exp\left\{-\frac{1}{4} \sum_j |z_j|^2\right\}$$

Laughlin - Wellenfunktion (Ansatz!)

Man findet, daß $\Psi_{1/m}$ einer uniformen Dichte mit Füllung

$$\nu = \frac{1}{m}$$

entspricht. Für $m=3$ und $m=5$ ist $\Psi_{1/m}$ der exakte Grundzustand für Coulomb-WW und Füllung $\nu = 1/m$.

Aber: 7 andere fraktionale Füllungen
als $f = 1/m$ und ihres Teilchen-Lock
Analogous $f = 1 - 1/m$

$\Rightarrow$ allgemeinere Theorie nötig!

9.3 Jain's Composite Fermions

Laughlin Wellenaufreibung erinnert an
Vortizes in Supraleiter ($l_m = 1$)

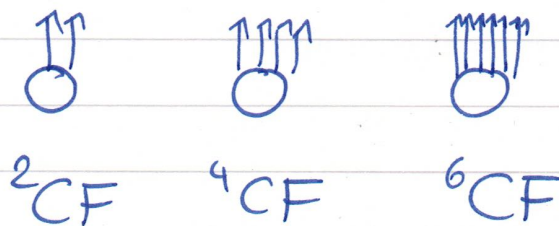
$$(9.11) \quad \Psi_{1/2p+m} = \prod_{j < n} (z_j - z_n)^{2p} \underbrace{(z_j - z_n) e^{-\frac{1}{4} \sum_e |z_e|^2}}_{\text{wie IQHE}}$$

Faktor

$$(z_j - z_n)^{2p} \Rightarrow \text{jtes Teilchen sieht } 2p \text{ Vortizes an den anderen Teilchen}$$
$$z = r e^{i\varphi}$$

Interpretation: Elektron im LLL mit $2p$ Vortizes die an es gekoppelt sind

$\Rightarrow$ composite fermions



Def: Ein composite fermion ist ein gebundener Zustand eines Elektrons mit einer geraden Anzahl von Flußquanten

(A) Warum werden CF gebildet?

Wechselwirkung ist repulsiv

$$\hat{V} = \sum_{m, M} V_m |M, m\rangle \langle M, m|$$

(ohne Projektion auf LLL)

$$\langle \hat{V} \rangle_{CF} \sim \sum_m V_m \left(\int d^2z \, z^{*m} z^{2p+1} e^{-|z|^2/2} \right)^2$$

$\nu = \frac{1}{2p+1}$

Winkelintegration in $\int d^2z$: $z = re^{i\varphi}$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \quad e^{i\varphi(2p+1-m)} \sim \delta_{m, 2p+1}$$

Effekte tragen nur Pseudopotentiale

$$(9.12) \quad \boxed{V_m \text{ mit } m \geq 2p+1}$$

zur Wechselwirkung bei!

Kopplung von $2p$ Flußquanten an ein Elektron
zur Bildung eines ^{2p}CF eliminiert alle Pseudopo-
tentiale beiträge mit $m \leq 2p$!

(B) Erklärung des FQHE: IQHE von CFs

(i) Betrachte Elektronen mit Füllung $\nu^* = n \in \mathbb{N}$
Das zugehörige Magnetfeld sei B^*

$$(9.13) \quad \nu^* = \frac{S\Phi_0}{|B^*|} = n$$

(ii) Binde an jedes Elektron unendlich dünne
Flußlinien mit $2p$ Fluß Quanten

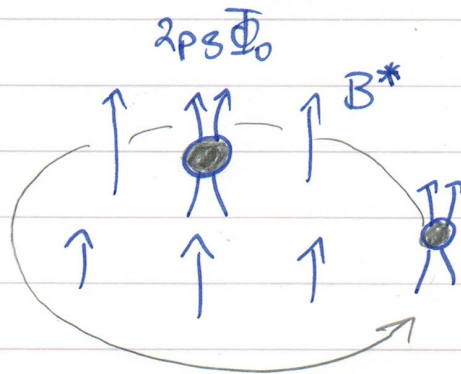
Elektron $\rightarrow ^{2p}\text{CF}$

(iii) Verteile die auf den Elektronen lokalisierten
Flußquanten adiabatisch gleichmäßig über

das gesamte System. Die Annahme ist, daß sich dabei die energetische Lücke nicht schließt.

$\Rightarrow$ Teilchen sehen effektives Magnetfeld

$$(9.14) \quad B = B^* + 2\rho S \Phi_0$$



Benötigt Umlauf um
eine geschlossene
Kurve sieht ein
Teilchen ein effektives
Magnetfeld

dies entspricht einer Füllung $(B^* = \pm \frac{e\Phi_0}{h})$

$$(9.15) \quad V = \frac{8 \Phi_0}{|B|} = \frac{n}{2\pi n \pm 1}$$

Jain's principle sequence

Die Kopplung an lokale Flußquanten reduziert die effektive Wechselwirkung:

Nöbving!

CF sind wechselwirkungsfrei

(C) Konstruktion der FQH-Wellenfunktionen
mittels CF-approach

ursprüngliches Magnetfeld $\vec{B}$ ($\equiv$ Eichpot. $\vec{A}^*$)

Wechselwirkende Elektronen

bei $\nu = \frac{n}{2pn \pm 1}$

~~$\rightarrow$~~ $\Psi_\nu(z_1, z_2, \dots, z_n)$
 Schwer!



$\nu^* = n$

nicht-ww CF



Φ_n

FQH-Wellenfunktion

Zusätzliches Magnetfeld durch CF Flußquanten

$$(9.16) \quad \vec{B}_{CF}(\vec{r}_i) = 2p \Phi_0 \sum_{j \neq i} \delta^{(2)}(\vec{r}_j - \vec{r}_i)$$

zugehöriges Eichpotential

$$(9.17) \quad \vec{A}_{CF}(\vec{r}_i) = \frac{2p}{2\pi} \sum_{j \neq i} \vec{r}_j \theta_{ij}$$

wobei

$$(9.18) \quad \frac{(z_j - z_k)}{|z_j - z_k|} = e^{-i\theta_{jk}}$$

Hamiltonian für (approximativ) nicht-wechselwirkende CF in $\vec{B}$

$$H_{MF} = \frac{1}{2m} \sum_j \left(\vec{p}_j + \frac{e}{c} \vec{A}^*(\vec{r}_j) + \frac{e}{c} \vec{A}_{CF}(\vec{r}_j) \right)^2$$

(wobei $\vec{A}^*$ hier Eichpotential zu $\vec{B}^*$ ist!)

Eigenfunktionen? Eichtrick zur Eliminierung von $\vec{A}_{CF}$

$$\begin{aligned} \psi_{MF} &= \Phi e^{-i2p \sum_{j < k} \theta_{jk}} \\ &= \Phi \prod_{j < k} \left(\frac{z_j - z_k}{|z_j - z_k|} \right)^{2p} \end{aligned}$$

mit

$$\frac{1}{2m} \sum_j \left(\vec{p}_j + \frac{e}{c} \vec{A}^*(\vec{r}_j) \right)^2 \Phi = E \Phi$$

$$(9.19) \quad \psi_{\frac{n}{2pn \pm 1}}^{MF}(B) = \Phi_{\pm n}(B^*) \prod_{j < k} \left(\frac{z_j - z_k}{|z_j - z_k|} \right)^{2p}$$

Diese Wellenfunktion hat ein paar Probleme! (siehe Jain "Composite Fermions").

Bessere Näherung

$$(9.20) \quad \psi_{\frac{n}{2pn \pm 1}}(B) = \Phi_{\pm n}(B) \prod_{j < k} (z_j - z_k)^{2p}$$

Bzw. Projektion auf niedrigstes LL

$$(9.21) \quad \boxed{\psi_{\frac{2p \pm 1}{2}}(B) = P_{LL} \Phi_{\pm n}(B) \prod_{j \neq n} (z_j - z_n)^{2p}}$$

(D) Allgemeines CF Diagonalisierung: L -levels

Obiges Schema kann auf Füllungen $\nu^* \notin \mathbb{N}$ verallgemeinert werden

$$\nu = \frac{\nu^*}{2p\nu^* \pm 1}$$

$$\boxed{\nu}$$

↓

$$\boxed{\nu^*}$$

↓

$$\boxed{\bar{\Phi}_{\nu^*}^{\alpha}}$$

α - Index für verschiedene EZ
(IOH-Zustände bei ν^*)

↓

$$\boxed{\psi_{\nu} = P_{LL} \prod_{j \neq n} (z_j - z_n)^{2p} \bar{\Phi}_{\nu^*}}$$

↓

Orthogonalisierung

↓

Diagonalisiere Hamilton-Matrix