

8. Klassifikation nichtwechselwirkender topologischer Systeme: the tenfold way

siehe z.B. S. Ryu, A.P. Schnyder, A. Furusaki, A.W. Ludwig
New J. Phys. 12 065010 (2010)

Betrachten generische Hamiltonians nicht wechselwirkender Fermionen (nicht-supraleitend $\rightarrow$ Isolatoren)

$$(8.1) \quad H = \sum_{AB} \hat{\psi}_A^\dagger h_{AB} \hat{\psi}_B \quad \{\hat{\psi}_A, \hat{\psi}_B^\dagger\} = \delta_{AB}$$

oder Supraleitend

$$(8.2) \quad H = \sum_{AB} (\hat{\psi}_A^\dagger, \hat{\psi}_A) \tilde{h}_{AB} \begin{pmatrix} \hat{\psi}_B^\dagger \\ \hat{\psi}_B \end{pmatrix}$$

Wir haben gesehen, daß solche Hamiltonoperatoren topologische Eigenschaften beschrieben durch $\mathbb{Z}$ bzw. $\mathbb{Z}_2$ Quantenzahlen besitzen können oder auch nicht.

Wie hängt die Existenz dieser mit allgemeinen (Symmetrie?) Eigenschaften von H zusammen?

Wir wissen: lokale Störungen (Brechung der Translationsinvarianz und anderer trivialer Symmetrien wie Inversion) beeinflussen Topologie i.A. nicht

Topologie ist eine Eigenschaft von translations nicht-invarianten Hamiltonians

⇒ Klassifikation jenseits üblicher Symmetrien
die durch Unitäre Operatoren U_S
beschrieben werden mit

$$(8.3) \quad [H, U_S] = 0 \text{ bzw. } U_S H U_S^{-1} = H \text{ mit } U_S^{-1} = U_S^\dagger$$

kennen, bereits eine solche "allgemeinere Symmetrie":
Zeitumkehr $T = UK$, die anti-unitär ist
TR-Invarianz

$$(8.4) \quad T H T^{-1} = H \quad \text{mit} \quad T^{-1} = -T^\dagger$$

Wir werden sehen, daß es noch eine zweite solche
anti-unitäre "allgemeine Symmetrie" gibt, die mit
einer Teilchen-Loch Transformation zusammenhängt
 $C = UK$, die ebenfalls anti-unitär ist
Teilchen-Loch oder Particle-Hole Symmetrie PH-Symmetrie

$$(8.5) \quad C H C^{-1} = -H \quad \text{mit} \quad C^{-1} = -C^\dagger$$

8.1 Zeitumkehr für Fermionen - eine Wiederholung

in Kap. 4.2 ⇒

$$(8.6) \quad T = e^{-i\pi \hat{S}_y} K =$$

$$(8.7) \quad T^2 = e^{-i\pi \hat{S}_y} T = \begin{cases} -1 & \text{ungerade Anzahl von F.} \\ +1 & \text{gerade} \end{cases}$$

$$(8.7) \quad T^2 = e^{-2i\pi\hat{S}_y} = \begin{cases} -1 & \text{ungerade Zahl} \\ +1 & \text{gerade Zahl von Fermionen} \end{cases}$$

Transformation der Teilchenzahloperatoren

Orbraum $T \hat{C}_{j\uparrow} T^{-1} = \hat{C}_{j\downarrow}$

(8.8) $T \hat{C}_{j\downarrow} T^{-1} = -\hat{C}_{j\uparrow}$

Impulsraum $T \tilde{C}_{k\downarrow} T^{-1} = \tilde{C}_{-\vec{k}\uparrow}$

(8.9) $T \tilde{C}_{k\uparrow} T^{-1} = -\tilde{C}_{-\vec{k}\downarrow}$

TR invariant, (nicht-supraleitende) Hamiltonians

(8.9) $T H T^{-1} = H$

(8.10) $\underline{h}(\vec{k}) = \underline{i d_y}^T \underline{h}^*(-\vec{k}) \underline{i d_y}$

(8.10) $\underline{h}(\vec{k}) = -\underline{h}^T(-\vec{k})$

8.2 Teilchen-Loch (PH) Transformation

Beispiel: BCS Theorie der Supraleitung

Spin singuläre Paarung

WW Term $c^\dagger c c^\dagger c \rightarrow \langle c^\dagger c^\dagger \rangle c c = \Delta^* c c$

(unterschiedliche Moden oder Spins)

Der verbleibende mean-field Hamiltonian, der sog. Bogoliubov-de Gennes Hamiltonian hat die Struktur

$$(8.11) \quad H = \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}} (C_{\vec{k}}^{\dagger}, C_{-\vec{k}}) h^{\text{BdG}}(\vec{k}) \begin{pmatrix} C_{\vec{k}} \\ C_{-\vec{k}}^{\dagger} \end{pmatrix} = \sum_{\vec{k}} \psi_{\vec{k}}^{\dagger} h^{\text{BdG}}(\vec{k}) \psi_{\vec{k}}$$

$$h^{\text{BdG}}(\vec{k}) = \begin{pmatrix} \epsilon_0(\vec{k}) A & \\ & -A^* - \epsilon_0(\vec{k}) \end{pmatrix} \quad \psi_{\vec{k}} \equiv \begin{pmatrix} C_{\vec{k}} \\ C_{-\vec{k}}^{\dagger} \end{pmatrix}$$

D.h.

Nambu-Spinor

$$(8.12) \quad H = \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}} \left\{ \epsilon_0(\vec{k}) (C_{\vec{k}}^{\dagger} C_{\vec{k}} - C_{-\vec{k}} C_{-\vec{k}}^{\dagger}) + \Delta C_{\vec{k}}^{\dagger} C_{-\vec{k}}^{\dagger} - \Delta^* C_{-\vec{k}} C_{\vec{k}} \right\}$$

Man sieht

$$(8.14) \quad h^{\text{BdG}} |\chi_n^{\pm}\rangle = \pm E_n |\chi_n^{\pm}\rangle$$

$$(8.13) \quad E_n = \sqrt{\epsilon_0^2 - |\Delta|^2}$$

$$(8.14) \quad |\chi_n^{\pm}\rangle = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} \quad |\chi_n^{\mp}\rangle = \begin{pmatrix} v_n \\ u_n^* \end{pmatrix}$$

$$(8.15) \quad H = \frac{1}{2} \sum_n (\gamma_n^{\dagger}, \gamma_n) \begin{pmatrix} E_n & 0 \\ 0 & -E_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_n \\ \gamma_n^{\dagger} \end{pmatrix}$$

Teilchen Loch Symmetrie (Redundanz)

$$(8.16) \quad |\chi_n^+\rangle = C |\chi_n^-\rangle$$

$$(8.17) \quad C = T_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{hier!})$$

und

$$\gamma_E^+ = \gamma_{-E}$$

Man sieht auch schon in (8.12) daß gilt

$$C_k \leftrightarrow C_{-k}^+$$

$$h^{\text{BdG}} \leftrightarrow T_x h^{\text{BdG}} T_x^{-1}$$

$$H \leftrightarrow H$$

C ist im Allgemeinen eine unitäre Matrix U_C
mit

$$(8.18) \quad C = C^\dagger = 1 \quad C^2 = \pm 1$$

prüfen muß (Siehe Kap. 4, S. 61, 62). Im Beispiel (triplett-pairing BdG Hamiltonian) ist $C^2 = +1$. Bei $C^2 = -1$ spricht man von einem singlet-pairing BdG Hamiltonian.

Es gilt für spinlose Teilchen

$$(8.19) \quad \boxed{C \hat{c}_j C^{-1} = \hat{c}_j^+}$$

sowie für Spinbehaftete Teilchen

$$(8.20) \quad \boxed{C \hat{c}_{\mu j} C^{-1} = \sum_{\nu} (U_C^*)_{\mu\nu} \hat{c}_{\nu j}^+}$$

Das ist das Analogon zu

$$T \hat{c}_j T^{-1} = \hat{c}_j \quad T \hat{c}_{\mu j} T^{-1} = \sum_{\nu} (U_T)_{\mu\nu} \hat{c}_{\nu j}$$

PH-Invarianz eines Hamiltonians

$$(8.21) \quad \boxed{C H C^{-1} = H}$$

(8.21)

$$H = \sum_{AB} \psi_A^+ \mathcal{H}_{AB} \psi_B$$

wobei für

nicht-supraleitender Hamiltonian (Fermion Erzeuger / Vernichter)

$$(8.22) \quad \psi_A^+, \psi_B \quad \hat{=} \quad C_{\vec{k}}^+, C_{\vec{k}}$$

supraleitender Hamiltonian (Nambu Operatoren)

$$(8.23) \quad \psi_A^+ = (C_{\vec{k}}^+, C_{-\vec{k}}) \quad \psi_B = \begin{pmatrix} C_{\vec{k}} \\ C_{-\vec{k}}^+ \end{pmatrix}$$

(8.21) impliziert im Ortsraum

$$(8.24) \quad C \mathcal{H}^* C^{-1} = -\mathcal{H}$$

sowie im Impulsraum

$$(8.25) \quad C h^*(-\vec{k}) C^{-1} = -h(\vec{k})$$

8.3 Kombinierte PH und TR Symmetrie

Diese wird oft chirale Symmetrie genannt oder auch Sub-lattice Symmetry (SLS).

Man findet, daß diese in allen Fällen außer einem eindeutig durch PHS und TRS bestimmt ist. Nur falls weder PHS noch TRS gelten, d.h.

$$CHC^{-1} \neq H \quad \text{und} \quad THT^{-1} \neq H$$

kann es SLS geben mit $SLS = \pm 1$.

Dieser führt auf 10 mögliche Symmetrie klassen

ten-fold way

Diese Symmetrieklassen bestimmen ob der Raum der Grundzustände in topologische Schichten

mit $\mathbb{Z}_2$ oder $\mathbb{Z}$ Quantenzahlen partitioniert werden kann

...	-1	$\phi_H=0$	1	...
-----	----	------------	---	-----

$\mathbb{Z}$

$\gamma_0=0$	$\gamma_0=1$
--------------	--------------

$\mathbb{Z}_2$

	TRS	DHS	SLS	d=1	d=2	d=3
A (unitär)	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$		$\mathbb{Z}$	
AI (orthogonal)	+1	$\emptyset$	$\emptyset$			
AII (symplectic)	-1	$\emptyset$	$\emptyset$		$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$
AIII (chiral unitär)	$\emptyset$	$\emptyset$	1	$\mathbb{Z}$		$\mathbb{Z}$
BDI (chiral orthogonal)	+1	+1	1	$\mathbb{Z}$		
CII (chiral symplectic)	-1	-1	1	$\mathbb{Z}$		$\mathbb{Z}_2$
D	$\emptyset$	+1	$\emptyset$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}$	
C	$\emptyset$	-1	$\emptyset$		$\mathbb{Z}$	
DIII	-1	+1	1	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}$
CI	+1	-1	1			$\mathbb{Z}$

$$T^2 = \pm 1 \quad C^2 = \pm 1$$

"räuml. Dimensionen

Bsp! : QHE : A, d=2 $\Rightarrow \mathbb{Z}$

QSHE : AII, d=2 $\Rightarrow \mathbb{Z}_2$