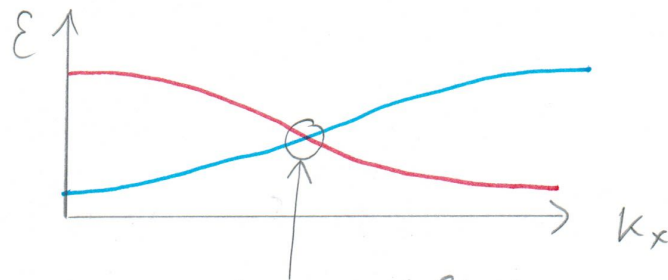


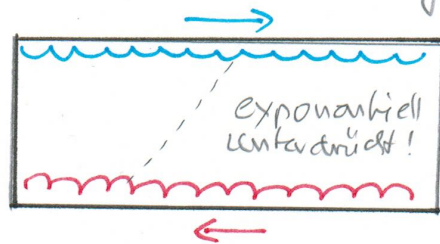
Randmoden von Chern Isolatoren (Q-H Systemen)
sind chiral und an verschiedenen Rändern
lokalisiert



nahezu perfekte Kreuzung
da exponentiell unterdrückte
Kopplung

⇒ keine Rückstreuung

$$\sigma_{xx} = 0 \quad (2.36)$$



⇒ Robustheit gegenüber Unordnungspotentialen.

3. Eindimensionale Gittermodelle

Die in Kap. 2 diskutierten Konzepte können auf
1-dim. Modelle mit einem periodisch in der
Zeit variierenden Parameter angewandt werden.
Dies wollen wir anhand eines einfachen Modells
untersuchen und dabei das Konzept der
symmetriegeschützten Topologie
kennenlernen.

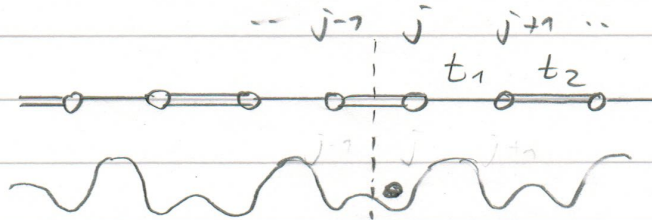
3.1. Das Su-Schrieffer-Hegger (SSH) Modell

3.1. Su-Schrieffer-Hegger Modell

betrachten 1D Gittermodell für Fermionen

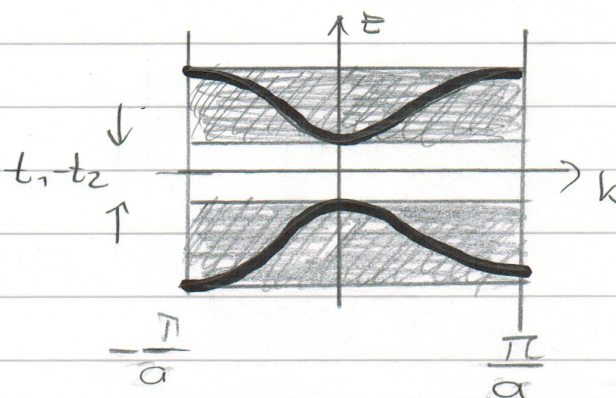
(Su, Schrieffer, Heger Phys. Rev. Lett 1979)

$$(3.1) \quad H = -t_1 \sum_{\substack{j \\ \text{gerade}}} c_j^\dagger c_{j+1} - t_2 \sum_{\substack{j \\ \text{ungerade}}} c_j^\dagger c_{j+1} + h a,$$



Gitterkonstante $a/2$

H ist inversionssymmetrisch bzgl. jedes bonds zwischen zwei Gitterplätzen. H ist darüberhinaus translationsinvariant um 2 Gitterplätze, d.h. es gibt eine Einheitszelle aus 2 Gitterplätzen. Diagonalisierung durch $\tilde{T}$ -Trasf liefert 2 Bänder



$(t_1 \geq t_2)$

Brillouinzone
 $-\frac{\pi}{a}, \frac{\pi}{a}$

Einheitszelle a

Bandlücke schließt sich für $t_1 = t_2$

Falls E_F in Bandlücke $\Rightarrow$ Bandisolator im unpolaren Subband

Translationsinvarianz $\Rightarrow$ Polarisation $\frac{P}{a} \bmod 1$

Inversionssymmetrie $\frac{P}{a} \stackrel{!}{=} -\frac{P}{a}$

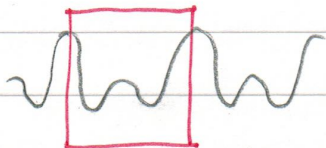
$$(3.2) \Rightarrow \boxed{\frac{P}{a} = 0, \frac{1}{2}}$$

Eichfreiheit der Polarisation (Wahl der Einheitszelle)

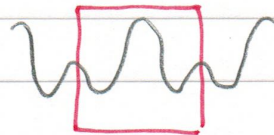
$$|u_n\rangle \rightarrow e^{ik\frac{a}{2}} |u_n\rangle$$

Zak-Phase $\gamma_{\pm} = (0, 0)$ bzw. $\gamma_{\pm} = (\pi, -\pi)$

$$(3.3) \quad P \longrightarrow P + \frac{a}{2}$$



Einheitszelle



Einheitszelle'

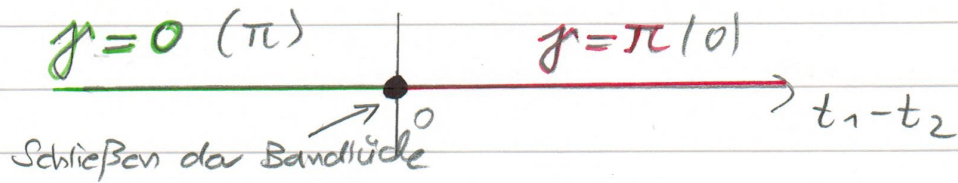
Zak-Phase von oberen (+) bzw. unteren (-) Subband

$$(3.4) \quad \gamma_{\pm} = (0, 0) \quad \text{bzw.} \quad \gamma_{\pm} = (\pi, -\pi)$$

je nach Eichung

Transformation $t_1 \leftrightarrow t_2 \hat{=} \text{Translation um } \frac{a}{2}$

$$P \leftrightarrow P + \frac{a}{2}$$

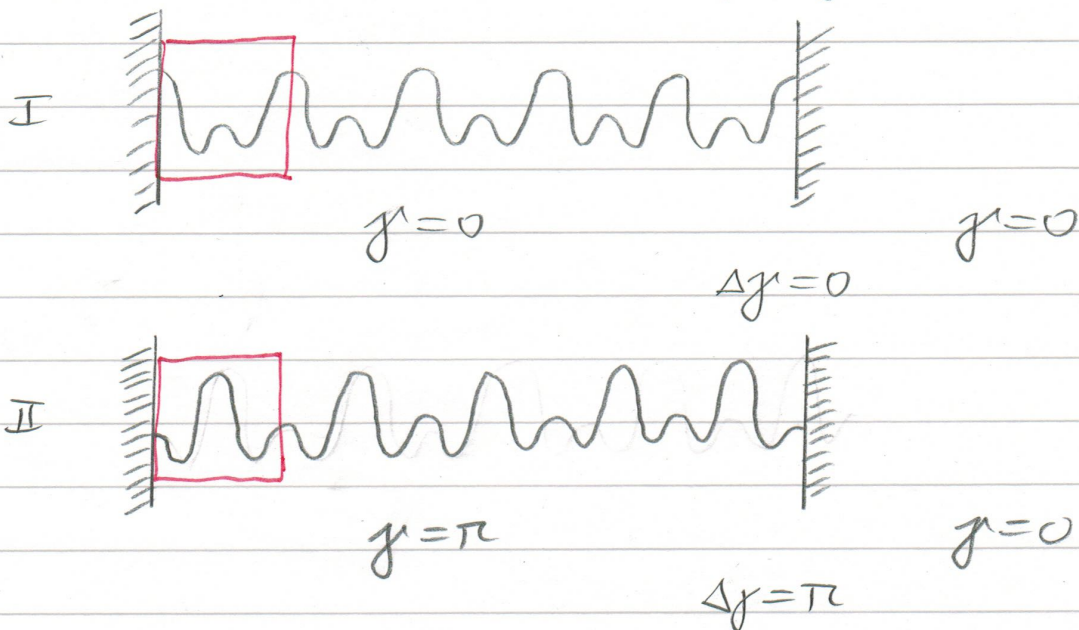


Phasen lokal nicht unterscheidbar aber haben unterschiedliche Zak-Phasen $\Rightarrow$ topologisch verschieden

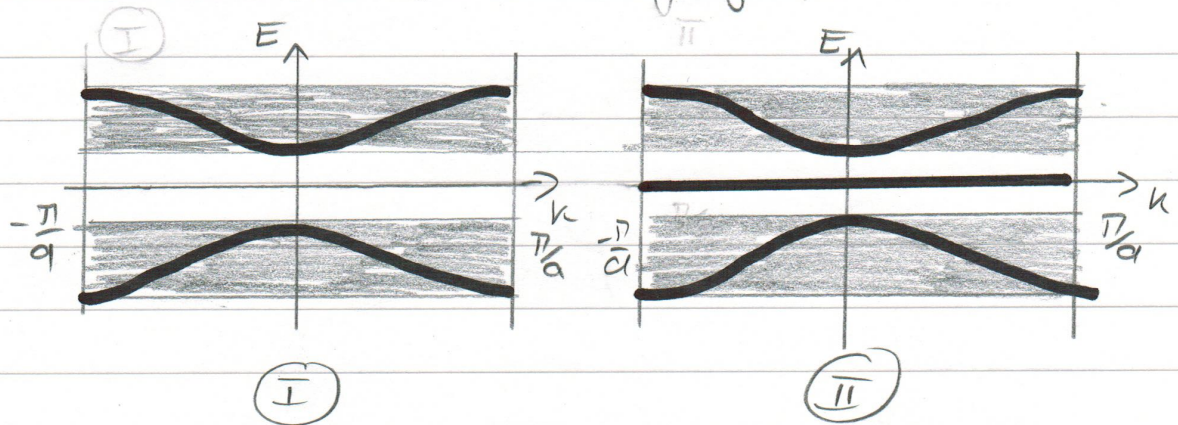
Topologisch verschiedene Phasen können nicht adiabatisch voneinander überführt werden wenn die Inversionssymmetrie erhalten sein soll

Symmetriegeschützte topologische Ordnung

Vakuum ist topologisch trivial und hat $\gamma=0 \pmod{2\pi}$
 $\Rightarrow$ Randzustände beim Übergang zum Vakuum?

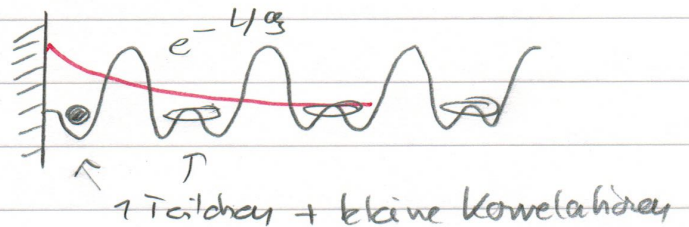


Spektrum mit offenen Randbedingungen:

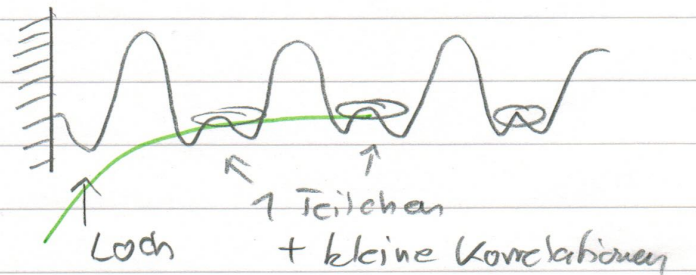


$E=0$ Randzustand

II $E_F > 0$
in Bandlücke

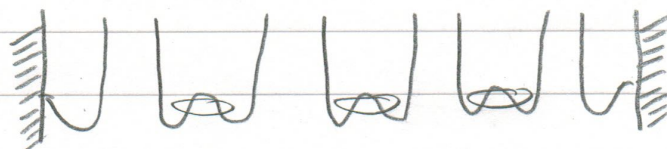


$E_F < 0$
in Bandlücke



Exponentiell am Rand lokalisierte Teilchen / Lochzustände mit $E=0$. $E=0$ folgt aus Teilchen-Loch Symmetrie des Zustands bei halber Füllung $C_j \leftrightarrow C_j^+$

atomarer Limes $t_1 \rightarrow 0$ $t_2 \neq 0$



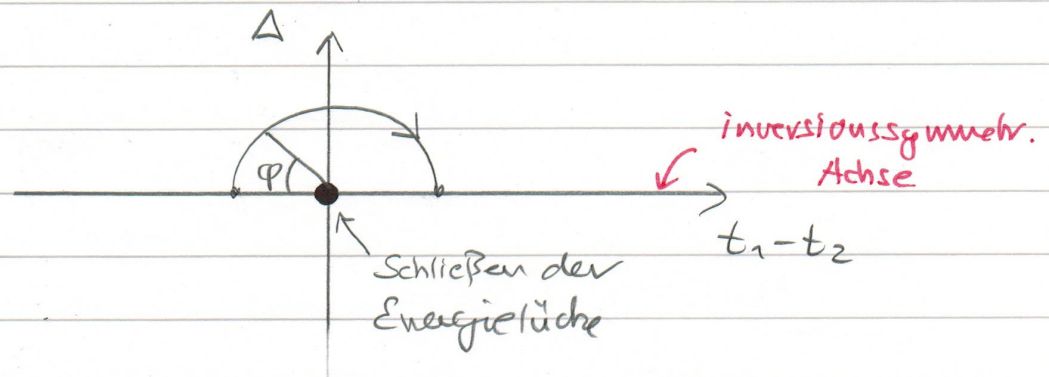
Randzustände faktorisieren

in einem endlichen System gibt es einen exponentiell kleinen Überlapp der Randzustände vom linken und rechten Rand $\Rightarrow$ exponentiell (e^{-L}) kleine Aufspaltung zwischen symmetrischer und antisymmetrischer Superposition.

3.2 Rice-Mele Modell und Thouless Pumpe

adiabatische Verbindung der Phasen im SSH Modell durch inversionssbrechendes Hamiltonian, (Rice, Mele Phys. Rev. Lett. 1982)

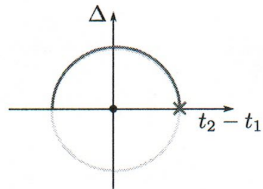
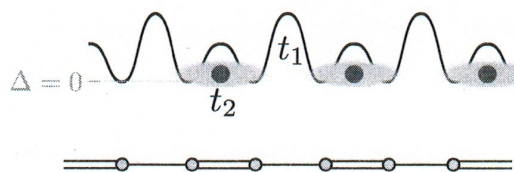
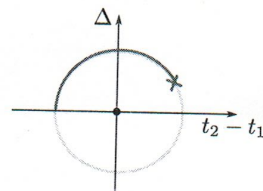
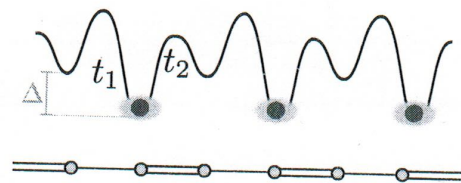
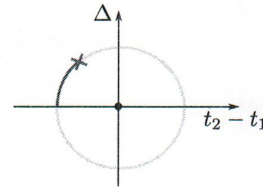
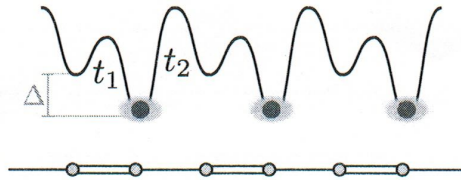
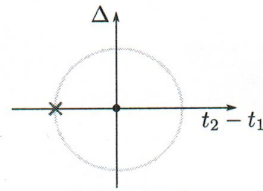
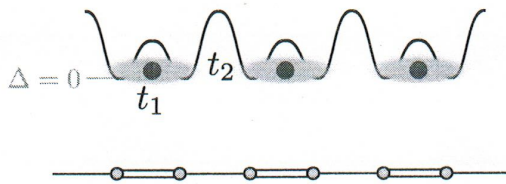
$$(3.5) \quad H_{RM} = H_{SSH} + \Delta \left(\sum_{\text{gerade}} c_j^\dagger c_j - \sum_{\text{ungerade}} c_j^\dagger c_j \right)$$



periodische Variation in $(\Delta, t_1 - t_2)$
 $\Rightarrow$ Windung der Zak Phase $\Rightarrow$ Chern Zahl

$$(3.6) \quad C = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \partial_\varphi \mathcal{P}(\varphi) = 1$$

Variiert man $(\Delta, t_1 - t_2)$ periodisch in der Zeit gibt es einen quantisierten Transport im Isolator (Thouless-pumpe) (Thouless Phys. Rev. B 1983)

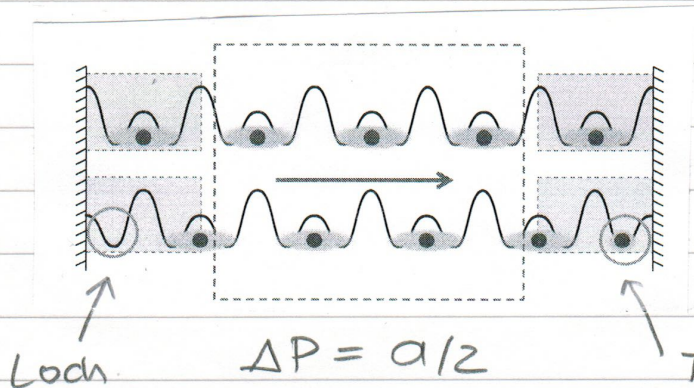


Thouless Pumpe

(3.7) $\frac{\Delta P}{a} = \frac{1}{2}$ quantisierte Teilchen transport

$y=0$

$y=R$



Erzeugung von Randzuständen

3.3* Kitaev Modell und Majorana Fermionen

Ein sehr interessantes 1-dim. topologisches Modell wurde von Kitaev 2000 vorgeschlagen.

Fermionen auf einem Gitter (nur eine Spin Komponente)

$$(3.8) \quad H = -t \sum_j (c_j^\dagger c_{j+1} + \text{h.o.}) - \mu \sum_j (c_j^\dagger c_j + \frac{1}{2}) + \sum_j (\Delta c_j c_{j+1} + \Delta^* c_j^\dagger c_{j+1}^\dagger)$$

Hat die Struktur eines BCS Hamiltonians, wobei

$$\Delta = |\Delta| e^{i\varphi} \rightarrow \text{superconducting gap}$$

μ - chemisches Potential; fixiert Teilchenzahl

Paarung von Fermionen mit demselben Spin (!)

$\rightarrow$ p-Wellen Supraleiter

Majorana Operatoren

$$(3.9) \quad w_{2j} \equiv -i(c_j - c_j^\dagger)$$

$$(3.10) \quad w_{2j-1} \equiv c_j + c_j^\dagger$$

$$(3.11) \quad w_m = w_m^\dagger \quad \text{selbstadjungiert}$$

(3.12)

$$\{\omega_e, \omega_m\} = 2\delta_{em}$$

Ein einzelner Majorana Operator (obwohl selbstadjungiert) kann in keinem Hamiltonoperator auftreten, da dieser die fermionische Parität verletzen würde.

hier: für (3.8) Phasenfaktoren in Definition der Majorana Operatoren

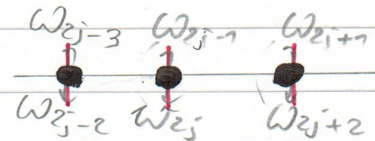
$$\omega_{2j-1} \equiv e^{i\frac{\theta}{2}} c_j + e^{-i\frac{\theta}{2}} c_j^\dagger \quad \omega_{2j} = -ie^{i\frac{\theta}{2}} c_j + ie^{-i\frac{\theta}{2}} c_j^\dagger$$

 $\Rightarrow$

$$(3.13) \quad H = -\frac{i\mu}{2} \sum_j \omega_{2j-1} \omega_{2j} + \frac{i}{2} \sum_j \left\{ (t+|\Delta|) \omega_{2j} \omega_{2j+1} + (-t+|\Delta|) \omega_{2j-1} \omega_{2j+2} \right\}$$

Grundzustand?

$$|\Delta| = t = 0 \quad \mu < 0$$

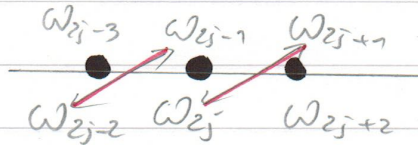


$$(3.14) \quad H = -\mu \sum_j \left(c_j^\dagger c_j - \frac{1}{2} \right) = -\frac{i}{2} \mu \sum_j \omega_{2j-1} \omega_{2j}$$

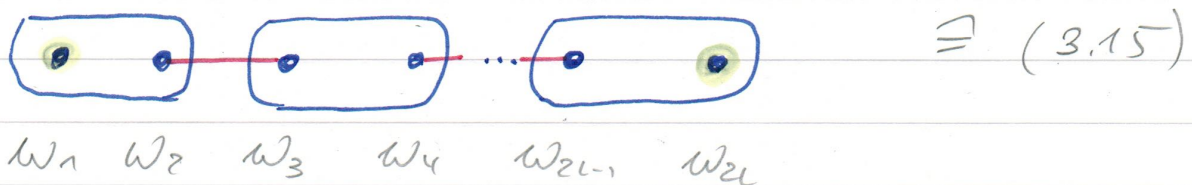
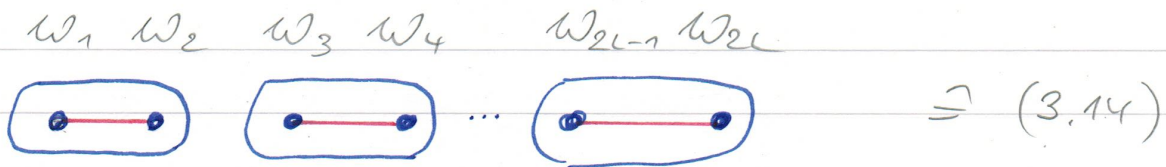
Majorana Operatoren bzgl. denselben Site sind gepaart und bilden Zustand mit Besetzung 0

$$\underline{|\Delta| = t > 0} \quad \mu = 0$$

$$(3.15) \quad H = it \sum_j w_{2j} w_{2j+1}$$



Paarung von Majoranas auf benachbarten Gitterplätzen



Für (3.15) können wir neue Erzeuger und Vernichter definieren

$$(3.16) \quad \tilde{c}_j = \frac{1}{2} (w_{2j} + i w_{2j+1})$$

$$\tilde{c}_j^+ = \frac{1}{2} (w_{2j} - i w_{2j+1})$$

$\uparrow$ Gitterplatz j $\uparrow$ Gitterplatz $j+1$

(3.15) $\Rightarrow$

$$(3.17) \quad H = 2t \sum_{j=1}^{L-1} \left(\tilde{c}_j^+ \tilde{c}_j - \frac{1}{2} \right)$$

Man beachte, daß der Hamiltonian (3.17)

$$\omega_1 \quad \text{und} \quad \omega_{2L}$$

nicht enthält!

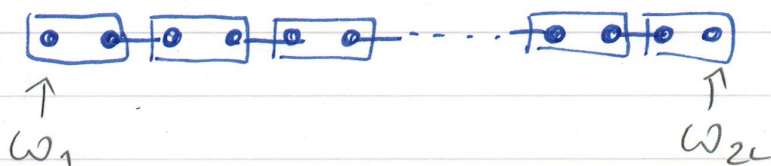
Der (oder die) Grundzustände von (3.17) erfüllen

$$(3.18) \quad \tilde{C}_j |\varphi_0\rangle = 0 \quad j=1,2,\dots,L-1$$

d.h. Vakuum der Bond-ferrionen

Man kann aber aus ω_1 und ω_{2L} ein delokalisiertes Fermion konstruieren

$$(3.19) \quad \tilde{C}_L \equiv \frac{1}{2} (\omega_{2L} + i\omega_1)$$



Der Hamiltonoperator enthält $\tilde{C}_L, \tilde{C}_L^\dagger$ nicht
d.h. es gibt 2 entartete GZ

$$|\varphi_0\rangle \quad \text{und} \quad |\varphi_1\rangle$$

die durch Anwesenheit / Abwesenheit des
delokalisierten Fermions unterscheidet

und gerade oder ungerade fermionische Parität
(Superposition aus Zuständen mit gerader / ungerader
Anzahl von Fermionen)

Paritätsoperator

$$\begin{aligned}
 (3.20) \quad P &= \prod_j (-i \omega_{2j-1} \omega_{2j}) = \prod_j (1 - 2c_j^\dagger c_j) \\
 &= \prod_j e^{-i\pi c_j^\dagger c_j} = e^{-i\pi \sum_j c_j^\dagger c_j}
 \end{aligned}$$

$$(3.21) \quad P|\psi_0\rangle = |\psi_0\rangle \quad P|\psi_1\rangle = -|\psi_1\rangle$$

$|\psi_0\rangle$ und $|\psi_1\rangle$ unterscheiden sich durch
Anregung des delokalisierten Fermions (Majorana Paar)

$$\tilde{c}_L^\dagger \tilde{c}_L \hat{=} 0(1)$$

Das delokalisierte Fermion kann als $E=0$ Rand-
anregung eines topologischen Supraleiters verstanden
werden. Letztere wollen wir allerdings in
dieser Vorlesung nicht näher diskutieren