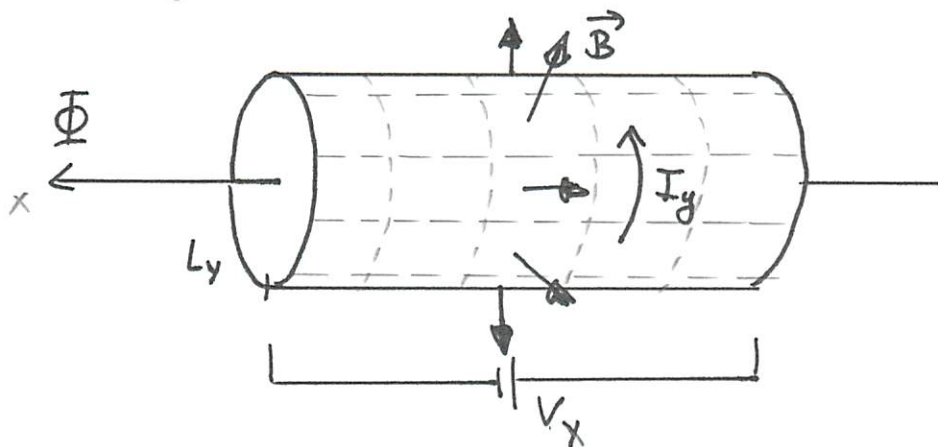


(A) Adiabatische Fluxeinführung (R. Laughlin)

Um das eben Gefundene auf eine alternative Art zu verstehen bedienen wir uns eines Arguments von Laughlin und betrachten einen Zylinder



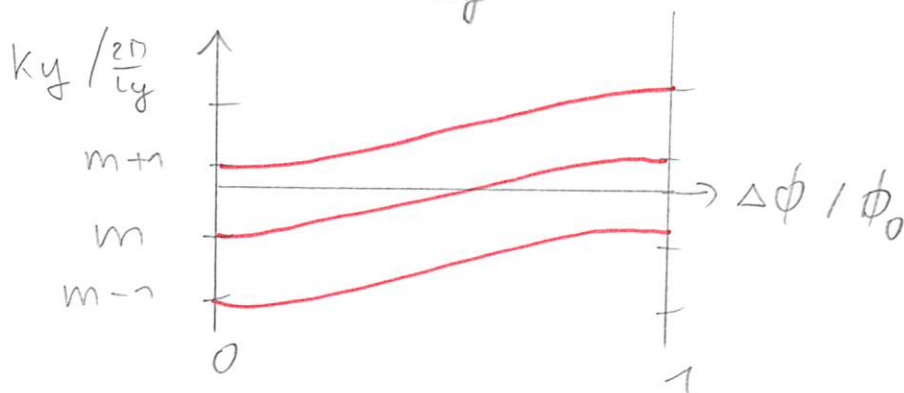
- periodisch in y Richtung k_y gute Quantenzahl
- Einführung eines Flusses Φ parallel zur x -Achse

$$(2.15) \quad \vec{A} \rightarrow \vec{A} + \frac{\Phi}{L_y} \vec{e}_y$$

$$k_y \rightarrow k_y + \frac{\Phi}{L_y} \frac{e}{\hbar c} = k_y + \frac{2\pi}{L_y} \frac{\Phi}{\Phi_0}$$

$\Rightarrow$ Einführung eines Flussquantums $\Delta \Phi = \Phi_0$

$$\Rightarrow \Delta k_y = \frac{2\pi}{L_y} \quad \text{adiabatisch}$$



(B) Shreda Formel

Shreda dichte in 2D System

$$\bar{j}_k = -\sigma_H E_{ke} E_e \quad k, e \in \{x, y\}$$

Eine 2dim. Levi Civita Symbol, E_e - elektrische Feld.
Kontinuitätsgleichung

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} &= -\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = -(\partial_x j_x + \partial_y j_y) \\ &= +\sigma_H (\partial_x E_y - \partial_y E_x) \end{aligned}$$

Maxwell-Gleichungen

$$\partial_x E_y - \partial_y E_x = \frac{1}{c} \frac{\partial B_z}{\partial t} = \frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t}$$

$\Rightarrow$

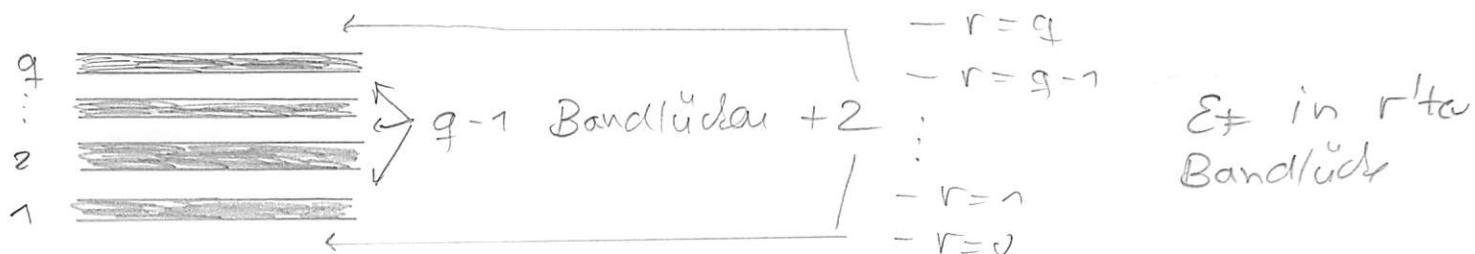
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = +\frac{\sigma_H}{c} \frac{\partial B}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sigma_H = c \frac{\partial \rho}{\partial B}} \quad (2.16)$$

Hall Leitfähigkeit $\equiv$ Änderung der Ladungsdichte (2D)
mit dem Magnetfeld.

(Bei konst. Spannung resp. konst. chemisches Potential ändert
das Magnetfeld die Zahl der zur Verfügung stehenden
Zustände)

(C) Hall Leitfähigkeit in quadratischem Gitter

Fluß pro Plaque $\Phi = P/q \Phi_0$
Fermienergie in r -ten Subband-Lücke



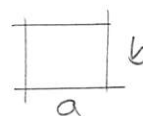
$r, p, q > 0$ natürliche Zahlen $0 \leq r \leq q$

$\exists$ natürliche Zahlen s_r und t_r so daß

$$r = q s_r + p t_r \quad |t_r| \leq \frac{q}{2}$$

Betrachten endliches Gitter mit M Gitterplätzen $\Rightarrow$ Zahl der besetzten Gitterplätze (E_F in der r 'ten Bandlücke)

$$N = \frac{r}{q} M$$



$$\Rightarrow g = e \frac{N}{A} = e \frac{r}{q} \frac{M}{A} = \frac{e r}{q a b} \quad \text{ab Fläche der Gittereinheitszelle}$$

mit der Shreda Formel

$$\sigma_H = c \frac{\partial g}{\partial B} = e c \frac{1}{a b} \frac{\partial}{\partial B} \left(s_r + \frac{p}{q} t_r \right)$$

Nun ist $\frac{p}{q} = \frac{\Phi}{\Phi_0} = \frac{B a b}{\Phi_0}$

$$(2.17) \quad \sigma_H = \frac{e c}{\Phi_0} t_r = \frac{e^2}{h} t_r$$

wenn E_F in r 'ten Bandlücke

Daroux Theorem

t_r ist natürliche Zahl.

Damit können wir die Beiträge aller sub-Bänder zur Hall Leitfähigkeit bestimmen:

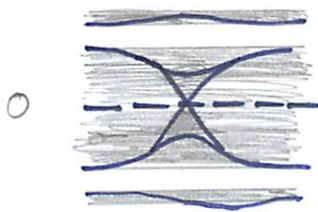
$$\begin{aligned} r+1 &= q S_{r+1} + p t_{r+1} \\ - \quad r &= q S_r + p t_r \end{aligned}$$

$$1 = q (S_{r+1} - S_r) + p (t_{r+1} - t_r)$$

jetzt speziell $\boxed{p=1}$ (zur Vereinfachung)

$$0 \leq r = q S_r + t_r \leq q$$

q gerade



- $r < \frac{q}{2}$ Bänder mit neg. Energie

$$S_r = 0 \quad t_r = r$$

Hall leitfähigkeit jedes Bandes in Einheiten von $\frac{e^2}{h}$

$$(2.18) \quad \boxed{J_r = t_{r+1} - t_r = 1}$$

- $r > \frac{q}{2}$ Bänder mit pos. Energie

$$S_r = 1 \quad t_r = r - q$$

$$(2.19) \quad \boxed{J_r = t_{r+1} - t_r = 1}$$

- $r = \frac{q}{2}$ man findet, daß diese Lücke keine echte Lücke ist sondern daß es Dirac Punkte gibt an denen sich die Bänder berühren

$$\begin{aligned} \Rightarrow \\ (2.20) \quad \boxed{J_{q/2} &= t_{q/2+1} - t_{q/2-1} = -\frac{q}{2} + 1 - \left(-\frac{q}{2} + 1\right) \\ &= -q + 2} \end{aligned}$$

q ungerade

- $r \leq \frac{q-1}{2}$ (neg. Energien)

$$s_r = 0 \quad t_r = r$$

$$J_r = t_{r+1} - t_r = 1 \quad (2.21)$$

- $r \geq \frac{q+1}{2}$ (pos. Energien)

$$s_r = 1 \quad t_r = r - q$$

$$J_r = t_{r+1} - t_r = 1 \quad (2.22)$$

- zentrales Energieband

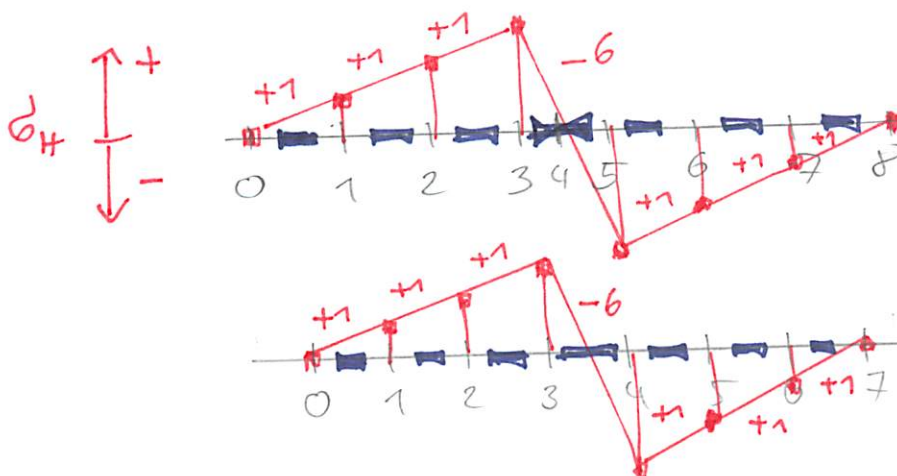
$$J_{\frac{q}{2}} = t_{\frac{q+1}{2}} - t_{\frac{q-1}{2}} = -q + 1 \quad (2.23)$$

totale Hall Leitfähigkeit (in Einheiten von e^2/h)

$$(2.24) \quad \sigma_H = \sum_{r=0}^m J_r \quad m \leq q+1 \quad m \text{ besetzte Bänder}$$

alle Bänder
(2.25)

$$\sigma_H^{\text{all}} = \sum_{r=0}^{q+1} J_r = 0 \quad (\text{wie schon früher gesehen})$$



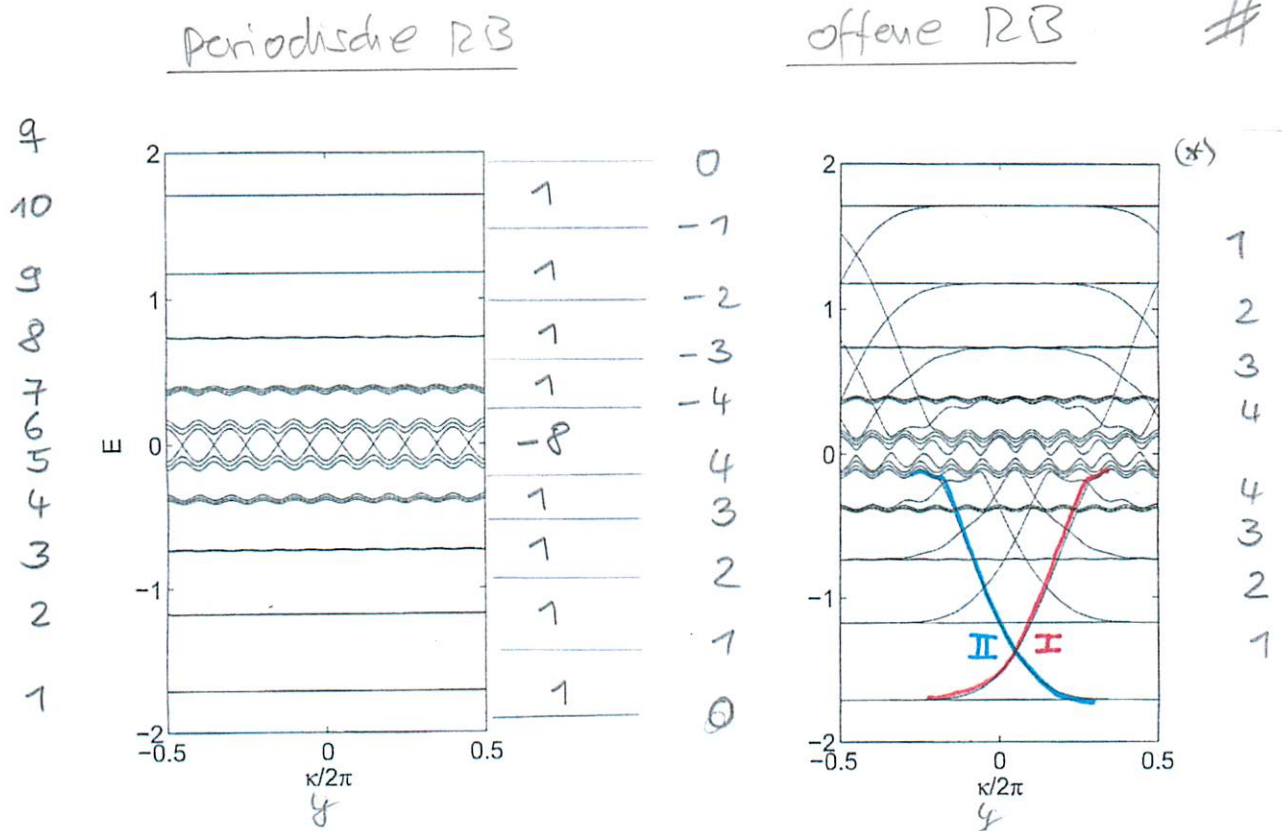
$q=8$

$q=7$

2.5 Randmoden und bulk-boundary Korrespondenzprinzip

Woher kommt die longitudinale Leitfähigkeit bei einem QH-System (Chern Isolator)? Bei ganzzahliger Füllung sind dies Isolatoren!?

(A) numerische Resultate



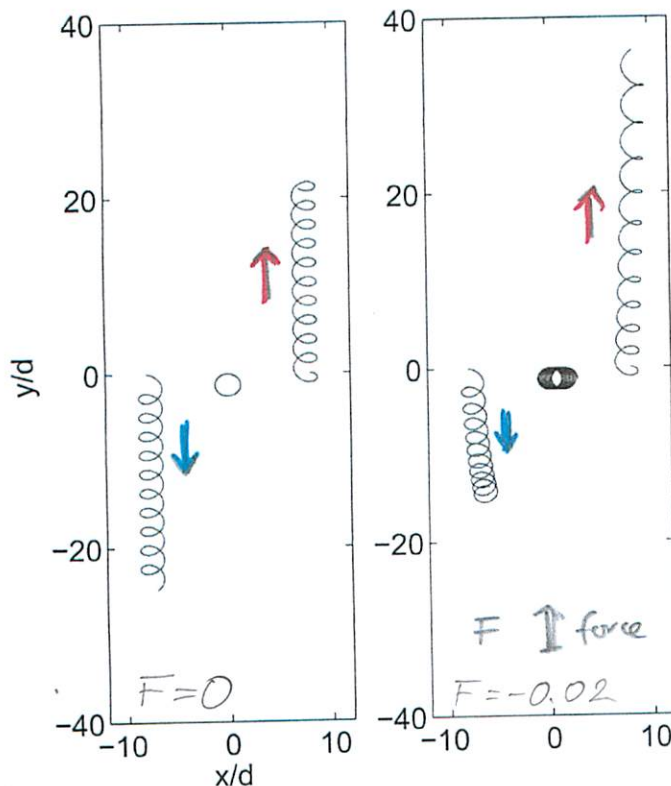
Man erkennt isolierte Moden im Falle offener Randbedingungen. Wir werden sehen, daß diese Randmoden (edge modes) sind

Typ I • $dw/dk > 0$
 Typ II • $dw/dk < 0$

Transport in "+"
 - " - in " " Richtung

Man bemerkt: Niveauf Kreuzungen sind echte
Kreuzungen (in endlichen Systemen
mit exponentiell kleiner Kopplung)

Klassische Einteilchen trajektorien



- chirale Orbits
- $F=0$ ($E=0$)
kein Nettophase
- $F \neq 0$
Nettophase!

Die Anzahl der verschiedenen chiralen Randmoden
(pro Richtung) entspricht dem Absolutwert der
totalen Hall Leitfähigkeit (in e^2/h) = Summe
der Chern Zahlen der besetzten Bänder
bulk - boundary correspondence

(B) Transformationsmethode

Berechnung der Energien und der Randmoden:
Betrachten wieder Zylindergeometrie aus 2.4 (A).
Strom in (periodische) y -Richtung wird durch
Einführung des Flusses Φ erzeugt.

$$(2.26) \quad H = -t_x \sum_{mn} C_{m+n}^+ C_n + \text{h. a.} - t_y e^{2\pi i \frac{\Phi}{L_y} \sum_{m,n} C_{m+n}^+ C_n} e^{2\pi i \alpha m}$$

$\uparrow$
Extrapphase durch Φ

Ränder $m=0$ und $m=L_x$

F-Trasfo in y -Richtung (keine Translationsinvarianz in x !)

$$(2.27) \quad C_{mn} = \frac{1}{L_y} \sum_{k_y} e^{ik_y n} C_m(k_y) \quad k_y = \frac{2\pi}{L_y} n_y$$

$\Rightarrow$

$$(2.28) \quad H = -t_x \sum_{m, k_y} C_{m+n}^+(k_y) C_m(k_y) - t_y \sum_{m, k_y} e^{2\pi i \frac{\Phi}{L_y}} C_m^+(k_y) C_m(k_y) \cdot e^{-ik_y + 2\pi i \alpha m} + \text{h. a.}$$

Betrachten Einteilchenzustand

$$(2.29) \quad |\varphi\rangle = \sum_m \varphi_m(k_y, \Phi) C_m^+(k_y) |0\rangle$$

Einsetzen in

$$H|\varphi\rangle = E|\varphi\rangle$$

liefert die Schrödingergleichung für $\varphi_m(k_y, \Phi)$:

$$-t_x (\psi_{m+1}(k_y, \Phi) + \psi_{m-1}(k_y, \Phi)) - \\ - 2t_y \cos(k_y - 2\pi \frac{\Phi}{L_y} - 2\pi \alpha_m) \psi_m(k_y, \Phi) = E \psi_m(k_y, \Phi)$$

$\Rightarrow$ rekursive Gleichung $\varepsilon \equiv E/t_x$

$$(2.30) \begin{pmatrix} \psi_{m+1}(k_y; \varepsilon, \Phi) \\ \psi_m(k_y; \varepsilon, \Phi) \end{pmatrix} = \underline{\underline{M}}_m(k_y; \varepsilon, \Phi) \begin{pmatrix} \psi_m(k_y; \varepsilon, \Phi) \\ \psi_{m-1}(k_y; \varepsilon, \Phi) \end{pmatrix}$$

wobei

$$(2.31) \underline{\underline{M}}_m = \begin{bmatrix} -\varepsilon - 2 \frac{t_y}{t_x} \cos(k_y - 2\pi \frac{\Phi}{L_y} - 2\pi \alpha_m) & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Jetzt nehmen wir an $\alpha = P/q$ und L_x Vielfaches von q

$$L_x = q \ell \quad \ell \in \mathbb{N}$$

Matrizen sind q -periodisch in m (da $\alpha = P/q$)

$\Rightarrow$

q -site Transformatrix

$$\underline{\underline{M}}(\varepsilon) = \underline{\underline{M}}_q(\varepsilon) \underline{\underline{M}}_{q-1}(\varepsilon) \cdots \underline{\underline{M}}_1(\varepsilon)$$

$$= \begin{pmatrix} M_{11}(\varepsilon) & M_{12}(\varepsilon) \\ M_{21}(\varepsilon) & M_{22}(\varepsilon) \end{pmatrix}$$

- M_{11} Polynom in ε vom Grade q
- M_{12}, M_{21} - " - $q-1$
- M_{22} - " - $q-2$

Da $L_x = q\ell \Rightarrow$

$$(2.32) \quad \begin{pmatrix} \psi_{L_x+1} \\ \psi_{L_x} \end{pmatrix} = \underline{\underline{M}}^e \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_0 \end{pmatrix}$$

offene Randbedingungen $\psi_{L_x} = \psi_0 \stackrel{!}{=} 0$
d.h.

$$\begin{pmatrix} \psi_{L_x+1} \\ 0 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \underline{\underline{M}}^e \begin{pmatrix} \psi_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (2.33) \quad \boxed{\left(\underline{\underline{M}}^e(k_y; \varepsilon, \Phi) \right)_{21} \stackrel{!}{=} 0}$$

$\Rightarrow$ Polynom in ε vom Grade L_x-1 , dieses hat L_x-1 reelle Wurzeln ε_n die die Eigenwerte des Problems mit offenen RB bestimmen

(C) Randmoden

Gl.(2.33) kann erfüllt werden mit

$$(2.34) \quad M_{21}(\varepsilon) = 0$$

da ein Produkt aus Dreiecksmatrizen eine Dreiecksmatrix ist.

Gl. (2.34) hat $q-1$ Lösungen ε_j $j=1,2,\dots,q-1$ die wir ordnen, d.h. $\varepsilon_i < \varepsilon_j$ falls $i < j$. Man kann zeigen, daß Gl. (2.34) keine entarteten Lösungen besitzt. D.h.

$$\begin{pmatrix} \psi_{qe+1}(\varepsilon_j) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [M_{11}(\varepsilon_j)]^e & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1(\varepsilon_j) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (2.35) \quad \frac{\psi_{qe+1}}{\psi_1} = [M_{11}(\varepsilon_j)]^e$$

falls $|M_{11}(\varepsilon_j)| < 1$ $\frac{\psi_{qe+1}}{\psi_1} \xrightarrow{e \rightarrow \infty} 0$

Wellenfunktion für $\varepsilon = \varepsilon_j$ lokalisiert am Gitterplatz $m=1$

Randmode am linkem Rand

falls $|M_{11}(\varepsilon_j)| > 1$ $\frac{\psi_{qe+1}}{\psi_1} \xrightarrow{e \rightarrow \infty} \infty$

Wellenfunktion für $\varepsilon = \varepsilon_j$ lokalisiert am Gitterplatz $m = qe+1$

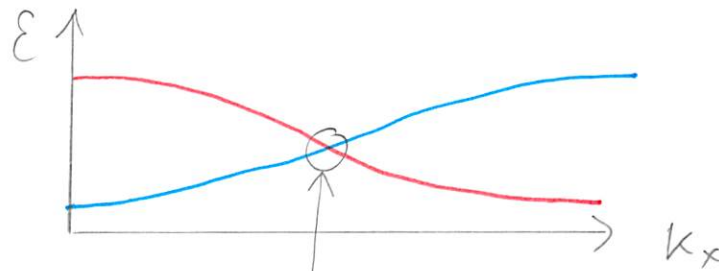
Randmode am rechtem Rand

falls $|M_{11}(\varepsilon_j)| = 1$ $\left| \frac{\psi_{qe+1}}{\psi_1} \right| = 1$

delokalisierte Wellenfunktion (in x-Richtung)

bulk Zustände

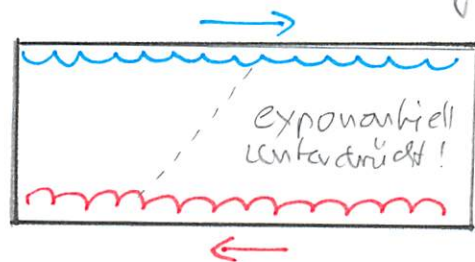
Randmoden von Chern Isolatoren (Q-H Systemen) sind chiral und an verschiedenen Rändern lokalisiert



nahezu perfekte Kreuzung
da exponentiell unterdrückte
Kopplung

⇒ keine Rückstreuung

$$\sigma_{xx} = 0 \quad (2.36)$$



⇒ Robustheit gegenüber Unordnungspotentialen.

3. Eindimensionale Gittermodelle

Die in Kap. 2 diskutierten Konzepte können auf 1-dim. Modelle mit einem periodisch in der Zeit variablen Parameter angewandt werden. Dies wollen wir anhand eines einfachen Modells untersuchen und dabei das Konzept der symmetriegeschützten Topologie kennenlernen.