

0.5 Entartungspunkte im Parameterraum, Berry-Vektorpotential und Chern Zahl

ein instructives Beispiel

$$(0.30) \quad H = \vec{h}(\vec{R}) \cdot \vec{\sigma}$$

$$\vec{h}(\vec{R}) = \vec{e}_R = \begin{pmatrix} \sin\theta \cos\phi \\ \sin\theta \sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

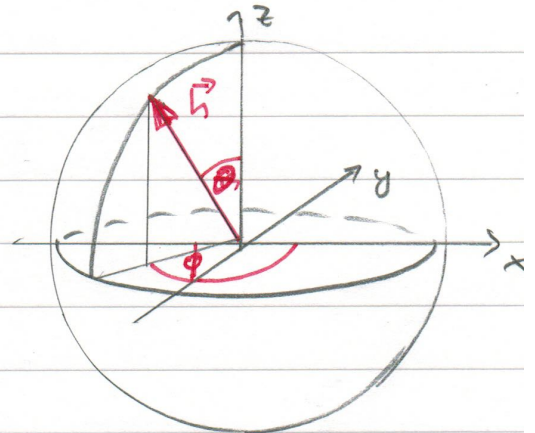
Eigenzustände

$$E_- = -1 \quad |E_- \rangle = \begin{pmatrix} \sin\frac{\theta}{2} e^{-i\phi} \\ -\cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

(0.31)

$$E_+ = +1 \quad |E_+ \rangle = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} e^{-i\phi} \\ \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

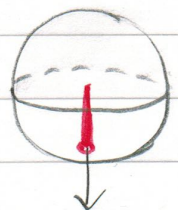
$\vec{R}$ auf Oberfläche
einer Kugel mit
Radius h



$\Rightarrow$ Berry Vektorpotential for $|E_- \rangle$

$$(0.32) \quad A_\theta = i \langle E_- | \partial_\theta E_- \rangle = 0$$

$$A_\phi = i \langle E_- | \partial_\phi E_- \rangle = \sin^2 \frac{\theta}{2}$$



Berry Magnetfeld

$$(0.33) \quad F_{\theta\phi} = \partial_\theta A_\phi - \partial_\phi A_\theta = \frac{1}{2} \sin\theta$$

auf der Kugeloberfläche gilt

$\vec{A}$ ist überall auf der Kugeloberfläche definiert bis auf den Südpol, denn
aber $|E-\rangle$ ist nicht definiert am Südpol

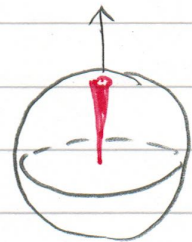
$$|E-(\theta=\pi)\rangle = \begin{pmatrix} e^{-i\phi} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \theta=\pi \quad \phi=?$$

Wir können natürlich eine andere Eichung verwenden

$$(0.35) \quad |E_{\pm}\rangle \longrightarrow |E_{\pm}\rangle e^{i\phi} = |E'_{\pm}\rangle$$

$$|E'_{-}\rangle = \begin{pmatrix} \sin \frac{\theta}{2} \\ -\cos \frac{\theta}{2} e^{i\phi} \end{pmatrix}$$

$$|E'_{+}\rangle = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} e^{i\phi} \end{pmatrix}$$



$$(0.36) \quad A_{\theta}' = 0 \quad A_{\phi}' = -\cos^2 \frac{\theta}{2}$$

$$(0.37) \quad F_{\theta\phi}' = \partial_{\theta} A_{\phi}' - \partial_{\phi} A_{\theta}' = \frac{1}{2} \sin \theta = V_R$$

Wie erwartet, da $\vec{V}$ eichinvariant ist, Nun ist $|E_{\pm}\rangle$ wohl definiert am Südpol aber nicht am Nordpol 0

$$|E-(\theta=0)\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ -e^{i\phi} \end{pmatrix} \quad \theta=0 \quad \phi=?$$

$\Rightarrow$ Für das Beispiel (0.30) läßt sich keine
 Eichung finden für die Zustände im
 gesamten Parameterraum (hier die Oberfläche
 der Kugel) wohl definiert sind. Man sagt
 für $H(\vec{R})$ in (0.30) existiert keine globale
glatte Eichung für das Berryechtopotential

Das hat interessante Konsequenzen:

betrachten $\vec{h} = \vec{R}$

$$(0.38) \quad \vec{V}_- = \frac{1}{2} \frac{\vec{R}}{R^3} \quad \vec{V}_+ = -\frac{1}{2} \frac{\vec{R}}{R^3}$$

Monopol am Ursprung $\vec{R} = 0$

$$(0.39) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2\pi} \oint\oint_{O(n)} d\vec{S} \cdot \vec{V}_{\mp} = \iiint_K dV \operatorname{div}(\vec{V}_{\mp}) = \pm 1$$

Am Ursprung gilt

$$E_+(\vec{R} \rightarrow 0) = E_-(\vec{R} \rightarrow 0)$$

Entartungspunkt

Allgemein gilt:

Wenn das Spektrum von $H(\vec{R})$ in einem zusammenhängenden Parameterraum überall gegappt ist bis auf m diskrete Entartungspunkte, dann gilt

$$(0.40) \quad \boxed{\oint_{O(v)} d\vec{S} \cdot \vec{V} = \iiint_V dV \operatorname{div} \vec{V} = 2\pi C} \quad m \in \mathbb{Z}$$

C heißt Chem Zahl

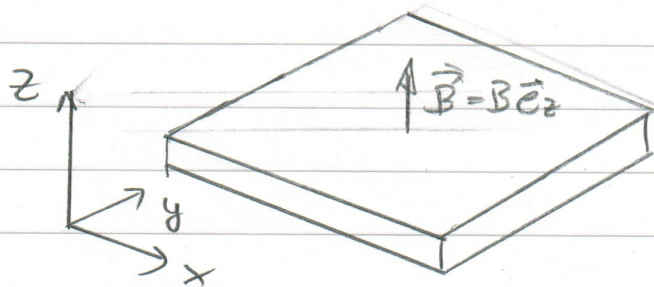
Man erkennt auch aus (0.26), daß in Entartungspunkten $\vec{V}$ nicht mehr definiert ist.

$$\vec{V}_n = \operatorname{Im} \sum_{m \neq n} \frac{\langle \varphi_n | \vec{\nabla} H | \varphi_m \rangle \times \langle \varphi_m | \vec{\nabla} H | \varphi_n \rangle}{(E_m - E_n)^2}$$

Die Chem Zahl ist eine topologische Quantenzahl

1. Der ganzzahlige Quanten-Hall Effekt

1.1. Landau Niveaus



$$(1.1) \quad H = \frac{1}{2m} \left(\vec{p} + \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

(A) Landau Eichung

$$(1.2) \quad \vec{A} = B(-y, 0, 0)$$

$$H = \frac{1}{2m} \left[\left(p_x - \frac{eB}{c} y \right)^2 + p_y^2 \right]$$

$$(1.3) \quad [H, p_x] = 0 \quad p_x = \hbar k_x \quad \text{Erhaltungsgröße}$$

Charakteristische Längenskala

$$(1.4) \quad \boxed{\ell_m = \sqrt{\frac{\hbar c}{eB}}} \quad \text{magnetische Länge}$$

Transformation

$$y \longrightarrow y' = \frac{y}{l_m} - l_m k_x \leftarrow \text{dimensionslos}$$

$$p_y \longrightarrow p_y' = \frac{l_m}{t_s} p_y$$

$$(1.5) \quad H \longrightarrow H' = t_s \omega_c \left[\frac{1}{2} y'^2 + \frac{1}{2} p_y'^2 \right]$$

$\hat{=}$ harmonischer Oszillator

$$(1.6) \quad \boxed{\omega_c = \frac{eB}{mc}} \quad \text{Zyklotronfrequenz}$$

$$(1.7) \quad \boxed{E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) t_s \omega_c} \quad \text{Landau Niveaus}$$

- Entartung für k_x
- y -Position hängt von k_x ab

(B) Symmetrische Eichung

$$(1.8) \quad \vec{A} = \frac{\vec{B} \times \vec{r}}{2} = \frac{B}{2} (-y, x, 0)$$

in dimensionslosen Einheiten (l_m und $t_s \omega_c$)

$$H = \frac{1}{2} \left[\left(-i \frac{\partial}{\partial x} - \frac{y}{2} \right)^2 + \left(-i \frac{\partial}{\partial y} + \frac{x}{2} \right)^2 \right]$$

komplexe Koordinaten in (x,y) Ebene

$$(1.9) \quad z = x - iy \quad z^* = x + iy = re^{i\theta}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z^*} \quad \frac{\partial}{\partial y} = -i \left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z^*} \right)$$

wobei z und z^* als unabhängig betrachtet werden

$$(1.10) \quad \boxed{\begin{aligned} \hat{a} &\equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{z}{2} + 2 \frac{\partial}{\partial z^*} \right) \\ \hat{a}^+ &\equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{z^*}{2} - 2 \frac{\partial}{\partial z} \right) \end{aligned}} \quad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z^*} &= \frac{1}{2} (\partial_x - i \partial_y) \\ \frac{\partial}{\partial z} &= \frac{1}{2} (\partial_x + i \partial_y) \end{aligned}$$

$$z^+ = z^* \quad \left(\frac{\partial}{\partial z^*} \right)^+ = \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^T = - \frac{\partial}{\partial z}$$

$$(1.11) \quad \boxed{\begin{aligned} \hat{b} &\equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{z^*}{2} + 2 \frac{\partial}{\partial z} \right) \\ \hat{b}^+ &\equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{z}{2} - 2 \frac{\partial}{\partial z^*} \right) \end{aligned}}$$

$$[a, a^+] = [b, b^+] = 1$$

$$(1.12) \quad \boxed{H = \hbar \omega_c \left(\hat{a}^+ \hat{a} + \frac{1}{2} \right)} \quad \underline{\text{Landau Niveaus}}$$

hängt nur von a, a^+ ab

Drehimpuls in z-Richtung

$$L_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \theta} = -\hbar \left(z \frac{\partial}{\partial z} - z^* \frac{\partial}{\partial z^*} \right)$$

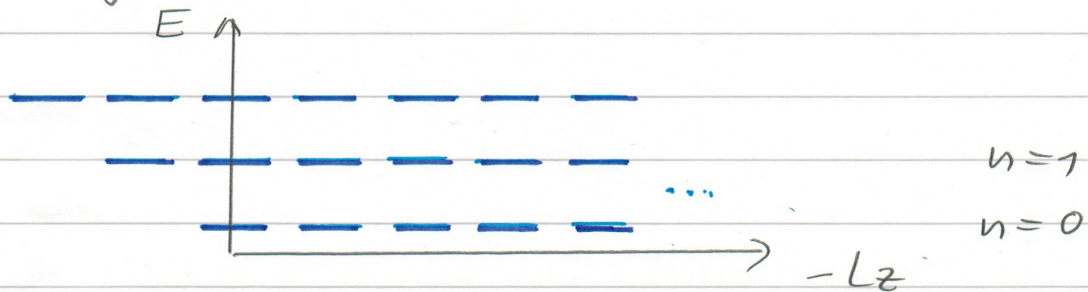
$$(1.13) \quad \boxed{L_z = \hbar (a^\dagger a - b^\dagger b)}$$

es gilt offensichtlich $[H, L_z] = 0$

Eigenwerte von L_z : $\hbar m$

$$m = n, n-1, n-2, \dots$$

n Eigenwert von $a^\dagger a$ (Landau Niveaus)



Man findet eine Unschärferelation für die Wellenfunktionen in den Landau Niveaus, z.B. für $n=0$

$$(1.14) \quad \boxed{\Delta x_0 \Delta y_0 \geq \frac{\ell_m^2}{2}}$$

Wellenfunktionen

$$(1.15) \quad |n, m\rangle \equiv \frac{b^{\dagger n+m} a^{\dagger n}}{\sqrt{(n+m)! n!}} |0\rangle$$

$\uparrow \quad \uparrow$
 LL Drehimpuls

$$(1.16) \quad \psi_{nm}(\vec{r}) \sim \left(\frac{z^*}{2} - 2 \frac{\partial}{\partial z} \right)^n \left(\frac{z}{2} - 2 \frac{\partial}{\partial z^*} \right)^{n+m} e^{-|z|^2/4}$$

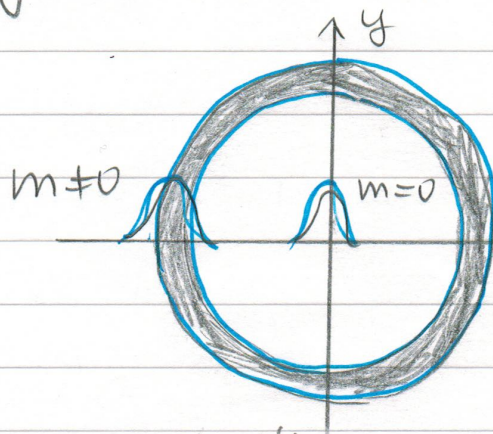
1.2. Lowest Landau level (LLL) $u=0$

(A) Wellenfunktionen in symmetrischer Eichung

$$\psi_{0m}(\vec{r}) \sim \left(\frac{z}{2} - 2 \frac{\partial}{\partial z^*} \right)^m e^{-|z|^2/4}$$

$$(1.17) \quad \psi_{0m}(\vec{r}) \sim z^m e^{-|z|^2/4}$$

analytisch in z bis auf Gaußfaktor



$$\Delta r_m = \frac{l_m}{\sqrt{2m}} \quad \text{mit } l_m = \sqrt{2m}$$

$$r_m = l_m \sqrt{2m}$$

$$A_0 = 2\pi r_m \Delta r_m = 2\pi l_m^2$$

Anzahl der Zustände in Fläche A (Entartungsgrad)

$$(1.18) \quad N = \frac{A}{2\pi l_m^2}$$

freie Elektronen $\rightarrow$ Pauliprinzip

Füllfaktor

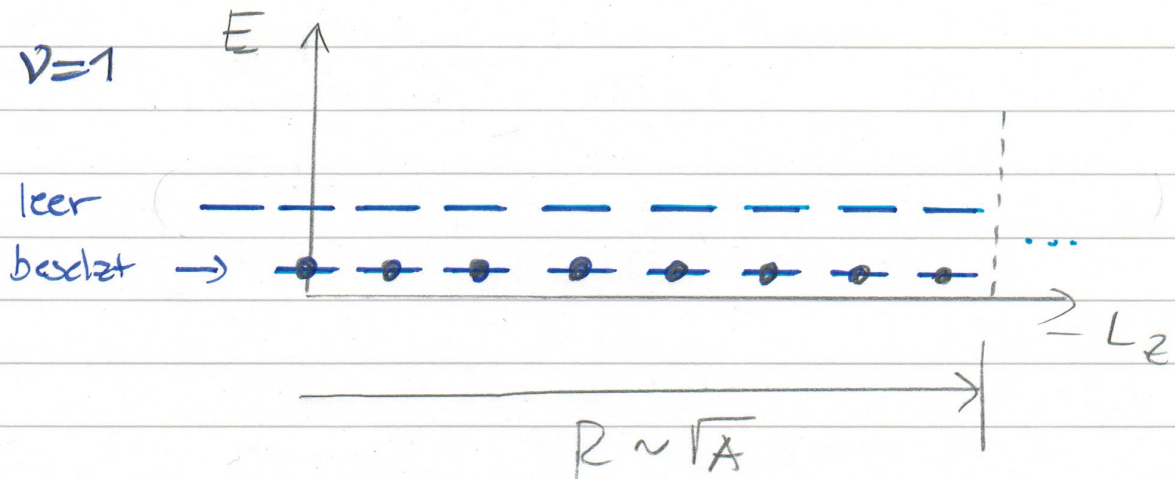
(1.19)

$$\nu = \frac{Ne}{N} = \frac{Ne 2\pi \ell_m^2}{A} = 2\pi g \ell_m^2 = \frac{S}{B/\Phi_0}$$

(1.20)

$$\Phi_0 = \frac{hc}{e}$$

Dirac Flußquantum



Vielteilchenwellenfunktion = Slaterdeterminante
für $\nu=1$

Einzelchenwellenfunktionen

$$\psi_{0m} \sim z^m e^{-\frac{1}{4}|z|^2}$$

(1.21)

$$\psi_{\nu=1}(z_1, \dots, z_N) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 & & \\ z_1^2 & z_2^2 & z_3^2 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ z_1^N & z_2^N & z_3^N & & z_N^N \end{vmatrix} e^{-\frac{1}{4} \sum_j |z_j|^2}$$

$$\psi_{r=1}(z_1, \dots, z_n) = \prod_{j < k} (z_j - z_k) \exp \left\{ -\frac{1}{4} \sum_j |z_j|^2 \right\} \quad (1.22)$$

1.3. Diskretisierung: Gittermodelle

$$\hat{H} \psi(\vec{r}) = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi(\vec{r})$$

Diskretisierung im Ortsraum

$$(1.23) \quad \begin{aligned} x &\rightarrow x_j = j \Delta x \\ y &\rightarrow y_j = j \Delta x \end{aligned}$$

$$\psi(\vec{r}) = \psi(x, y) \rightarrow \psi_{ij}$$

$$\Delta \psi \rightarrow \frac{1}{\Delta x^2} (\psi_{i+j} + \psi_{i-j} + \psi_{i+j+1} + \psi_{i+j-1} - 4\psi_{ij})$$

$$(1.24) \quad \hat{H} \psi_{ij} = -t (\psi_{i+j} + \psi_{i-j} + \psi_{i+j+1} + \psi_{i+j-1} - 4\psi_{ij})$$

$$(1.25) \quad t = \frac{\hbar^2}{2m \Delta x^2} \quad \text{Hüpfamplitude}$$

