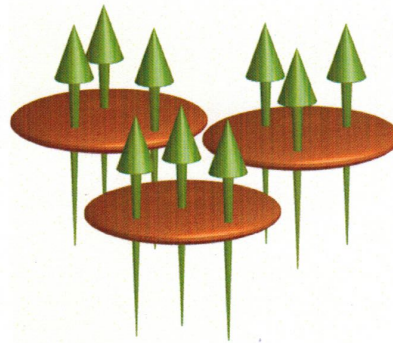
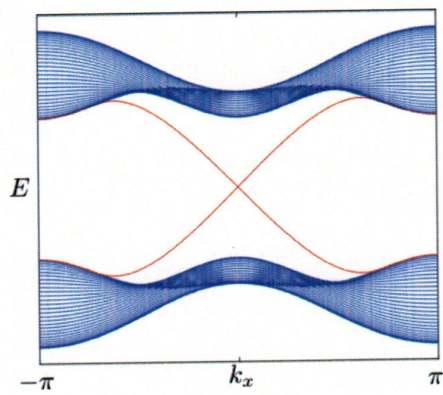


Topologische Quantensysteme

SS 2016



Prof. Dr. Michael Fleischhauer

Literatur

Zyuan F. Ezawa "Quantum Hall Effects:
Field theoretical approach and
Related Topics" World Scientific 2000

Jainendra K. Jain "Composite Fermions"
Cambridge Univ. Press 2007

M. Z. Hasan, C. L. Kane "Topological Insulators"
Rev. Mod. Phys. 82, 3045 (2010)

Joel E. Moore "An introduction to topological phases
of electrons"
Les Houches lectures

Di Xiao, Ming-Che Chang "Berry phase effects on
Qian Niu electronic properties"
Rev. Mod. Phys. 82, 1959 (2010)

Shinsei Ryu, Andreas P. Schnyder, Akira Furusaki, and
Andreas W. W. Ludwig

"Topological insulators and superconductors:
ten-fold way and dimensional hierarchy"
arXiv: 0912.2157

B. Andrei Bernevig

"Topological insulators and
topological superconductors"
Princeton Univ. Press 2013

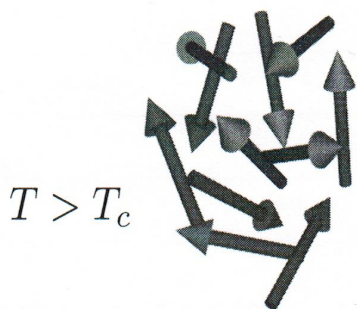
0. Einleitung

0.1. Ginzburg-Landau Paradigma der Phasenübergänge

unterschiedliche Phasen der Materie lassen sich
durch spontan gebrochene Symmetrien klassifizieren

(0.1) Heisenberg Modell

$$H = -J \sum_{\langle ij \rangle} \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j$$



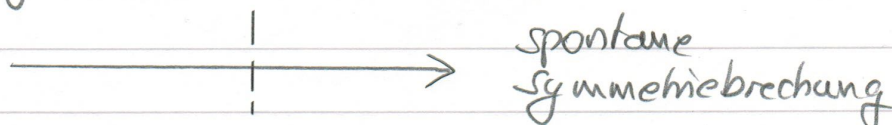
Paramagnet



Ferromagnet

H hat $O(3)$ - Rotationssymmetrie

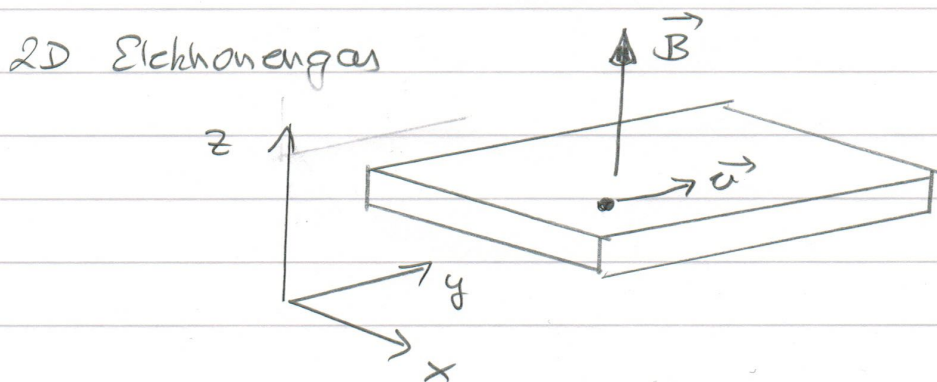
diese ist im ferromagnetischen Grundzustand
spontan gebrochen



- Daraus wurde die Hypothese abgeleitet, daß alle Phasenübergänge mit einer spontanen Brechung einer Symmetrie einhergehen.

0.2. Jenseib Ginzburg-Landau: Quanten-Hall Effekt

(A) Der klassische Hall - Effekt



Lorentzkraft

$$(0.2) \quad \vec{F} = -e(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}) = m \vec{\dot{v}}$$

stationärer Zustand $\vec{\dot{v}} = 0$

$$(0.3) \quad \vec{E} = -\frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B} \quad \vec{B} = (0, 0, B) \\ \Rightarrow \vec{E} = (E_x, E_y, 0)$$

Shom

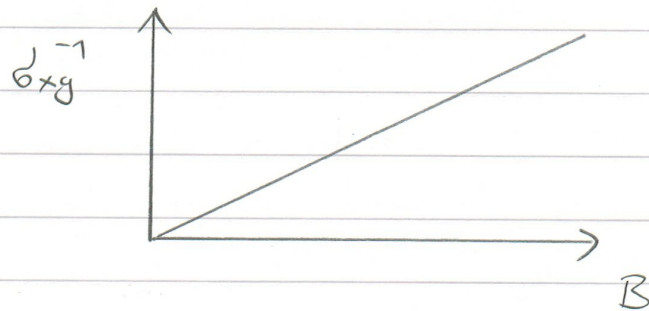
$$\vec{j} = -es\vec{v}$$

$$(0.4) \quad j_x = -\frac{esc}{B} E_y \quad j_y = \frac{esc}{B} E_x$$

Hall resistivity

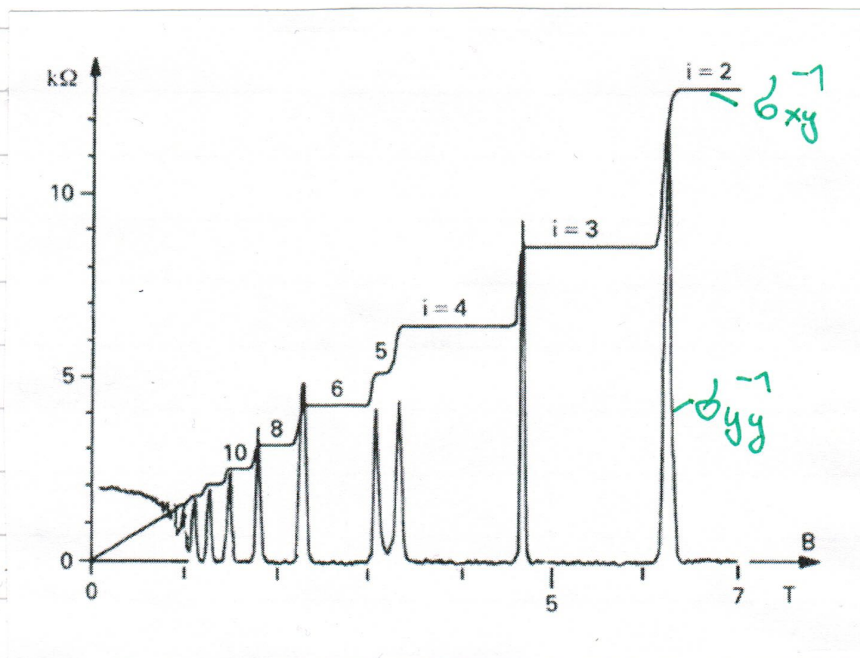
$$\vec{j} = \underline{\underline{\sigma}} \vec{E}$$

$$(0.5) \quad \sigma_{xy}^{-1} = \frac{E_x}{j_y} = \frac{B}{e \hbar c}$$



(B) Die Entdeckungen von von Klitzing und von Tsui, Störmer und Gossard

1980 Klaus von Klitzing (Nobelpreis 1985)



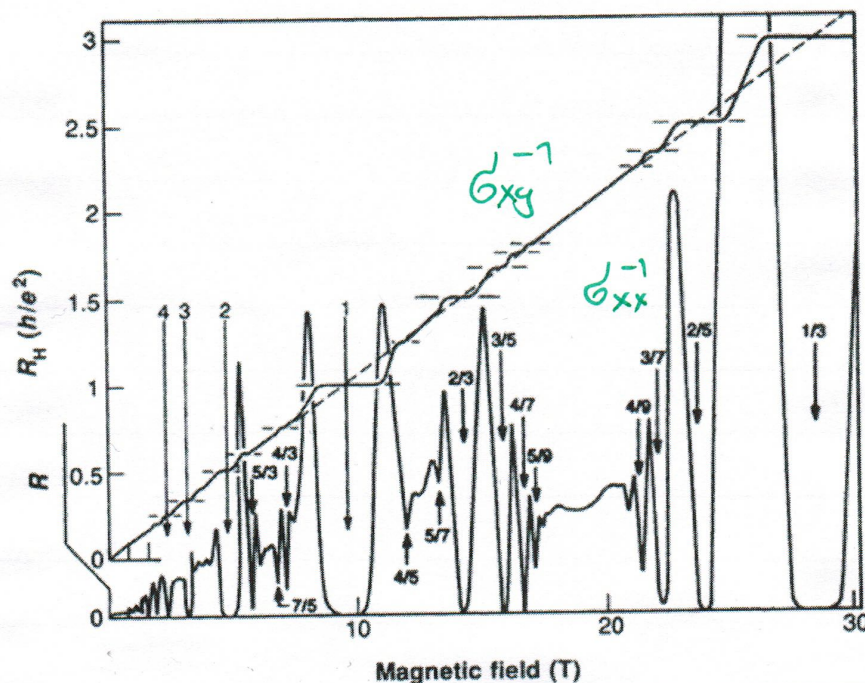
• Plateaus!

$$(0.6) \quad \sigma_{xy}^{-1} = \frac{h}{ne^2} \quad \frac{h}{e^2} = 25813.807 \Omega$$

- verschwindende longitudinaler Widerstand

$$R_{11} \sim \exp \left\{ -\frac{\Delta}{2k_B T} \right\} \xrightarrow{T \rightarrow 0} 0$$

1982 H.L. Störmer, D.C. Tsui, A.G. Gossard
 Theorie: R. Laughlin
 (Nobelpreis Störmer, Tsui, Laughlin 1998)



• Plateaus (ν) $\nu_{xy}^{-1} = \frac{h}{e^2}$ f rationale Brüder

⇒ ganzzahlige und fraktionale
 Quanten-Hall Effekt

- Effekte robust gegenüber Verunreinigungen

Q.-Hall Hamiltonian hat keine Symmetrie die gebrochen werden könnten!

→ Natur der Phasenübergänge?

⇒ Phasenübergänge jenseits der
Ginzburg-Landau Klassifizierung !

charakterisiert durch diskrete Quantenzahlen

⇒

topologische Zustände

relevante Quantenzustände (Grundzustand des Hamiltonians und bestimmten Deformationen)
charakterisiert durch bestimmte topologische
Quantenzahlen

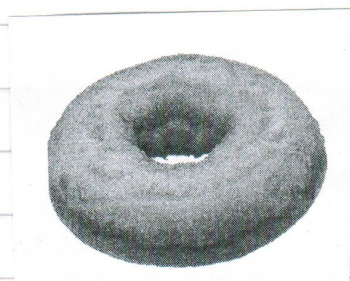
0.3. Topologische Quantenzahlen:

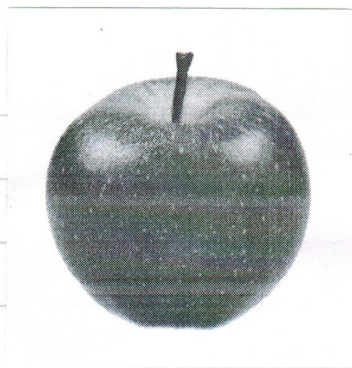
Gauss-Bonnet Theorem

"Ein Topologe ist ein Mathematiker der einen
Donut nicht von einer Kaffeetasse unterscheiden
kann, aber schon von einer Banane."

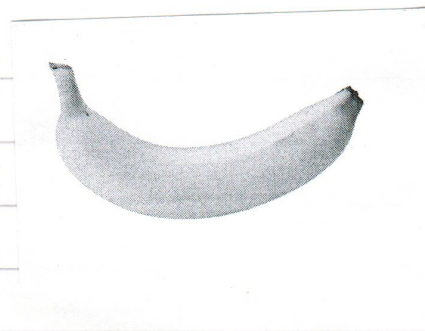


$\cong$

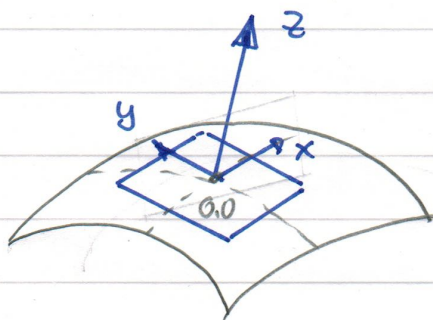




$\Rightarrow$



betrachten 2-dimensional, kompakte Mannigfaltigkeit
glatt eingebettet in 3 Dimensionen



$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(0,0)} = \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{(0,0)} = 0$$

Oberfläche in der Umgebung von $(0,0)$

$$(0.8) \quad z(x,y) \approx \frac{1}{2} (x,y) \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Hesse Matrix H

Eigenwerte der Hessematrix = inverse Krümmungsradien

$$(0.9) \quad \lambda_1, \lambda_2 = \kappa_1^{-1}, \kappa_2^{-1}$$

$\det(H) = \lambda_1 \lambda_2 \hat{=} \text{Gaußsche Krümmung}$

Bspl: Kugeloberfläche

$$\begin{aligned} z &= r \cos \vartheta & x &= r \sin \vartheta \cos \varphi \\ y &= r \sin \vartheta \sin \varphi \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \dots \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = r^{-1}$$

über Oberfläche integrierte Gauß'sche Krümmung

$$\int dA \lambda_1 \lambda_2 = 4\pi r^2 \frac{1}{r^2} = 4\pi$$

Gauß-Bonnet Formel

(0.10)

$$\int dA \lambda_1 \lambda_2 = 2\pi \chi = 2\pi (2-g)$$

χ	Euler Charakteristik	} topologische Invarianten $\in \mathbb{Z}$
g	Genus	



$g=0$

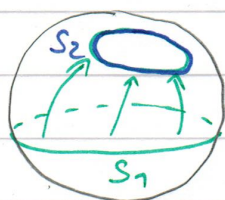


$g=1$

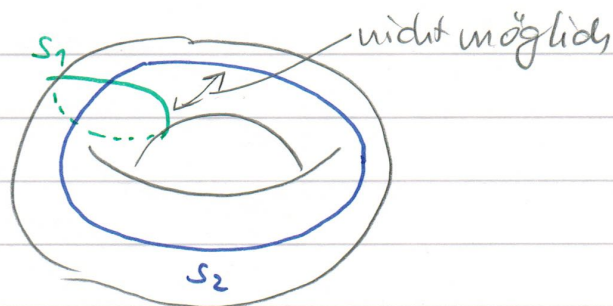
Deformationen der Oberfläche ohne Erzeugung neuer Löcher verändert nicht topologische Invarianten.

Wir werden sehen, daß wir verschiedene Q-Hall Phasen durch topologische Invarianten wie die Euler Charakteristik klassifizieren können.

Eine wichtige Eigenschaft die topologisch verschiedene Oberflächen (verschiedener g) unterscheidet ist daß es für $g \neq 0$ geschlossene Pfade gibt die nicht ineinander überführt werden können durch kontinuierliche, glatte Deformationen (Homotopie)



S_1 und S_2 sind homotop



nicht homotop

0.4. Adiabatisches Theorem und Berry Phase

Quantensystem mit zeitabhängigem Hamiltonian

$$H = H(R) \quad R = R(t)$$

instantane Eigenzustände

$$(0.11) \quad H(R) |n(R(t))\rangle = E_n(R(t)) |n(R(t))\rangle$$

falls $R(t)$ hinreichend langsam variiert bleibt ein anfänglich in einem instantanen Eigenzustand präpariertes System in diesem Zustand

adiabatisches Theorem

$$(0.12) \quad |\psi(t)\rangle = \sum_n c_n(t) e^{i\alpha_n(t)} |n(R(t))\rangle$$

$$(0.13) \quad \alpha_n(t) = -\frac{1}{\hbar} \int_0^t dt E_n(R(t))$$

dynamische Phase

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = H(R(t)) |\psi(t)\rangle$$

$$\Rightarrow \sum_n \left(\dot{c}_n e^{i\alpha_n t} |n(t)\rangle + c_n(t) e^{i\alpha_n(t)} |\dot{n}(t)\rangle \right) = 0$$

$$(0.14) \quad \dot{c}_m(t) = - \sum_n c_n(t) e^{i(\alpha_n(t) - \alpha_m(t))} \langle m | \dot{n} \rangle$$

$$\langle m | \dot{n} \rangle = ?$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} H(R(t)) |n(t)\rangle &= \left[\frac{d}{dt} H(R(t)) \right] |n(t)\rangle + H(R(t)) |\dot{n}\rangle \\ &= \dot{E}_n |n(t)\rangle + \bar{E}_n |\dot{n}(t)\rangle \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \langle m | \frac{d}{dt} H(R(t)) |n\rangle = (E_n(t) - E_m(t)) \langle m | \dot{n} \rangle$$

$$(0.15) \quad \dot{c}_m(t) = - \sum_{n \neq m} c_n(t) e^{i(\alpha_n(t) - \alpha_m(t))} \frac{\langle m | \frac{d}{dt} H | n \rangle}{E_n - E_m}$$

Sei nun das System zu $t=0$ in instantanem EZ

$$c_n(0) = 1 \quad c_{m \neq n}(0) = 0$$

$$C_m(\delta t) = -i\hbar \frac{\langle m | \frac{d}{dt} \hat{H} | n \rangle}{(E_m - E_n)^2} \left(e^{i(E_m - E_n)\delta t/\hbar} - 1 \right)$$

$$|C_m(\delta t)| \ll 1 \quad \text{falls}$$

$$(0.16) \quad \boxed{\langle m | \frac{d}{dt} \hat{H} | n \rangle \ll \frac{|E_m - E_n|^2}{\hbar}} \quad m \neq n$$

adiabatische Bedingung

zeitliche Änderung der Matrixelemente von $\hat{H}$ muß klein sein gegen Energieabstand zu $|\psi(0)\rangle = |n(0)\rangle$

$\Rightarrow$ Systeme mit Energielücke!

Berry Phase

adiabatische Limes $C_n(0)=1 \Rightarrow |C_n(t)|=1$

Phase? Ansatz: $C_n(t) = e^{i\gamma_n(t)}$

$$(0.17) \quad \dot{C}_n(t) = i\gamma'_n C_n(t) = -C_n(t) \underbrace{\langle n | \dot{n} \rangle}_{(0.14)}$$

$$(0.18) \quad \boxed{\gamma_n(t) = i \int_0^t \langle n(\tau) | \frac{d}{d\tau} n(\tau) \rangle} \quad \text{Berry Phase}$$

$$(0.19) \quad |\psi(t)\rangle = e^{i(\alpha_n(t) + \gamma_n(t))} |n(t)\rangle$$

- 11 - $\swarrow \nwarrow$ dynamische, Berry Phase

weiterhin kann man $\langle m | \vec{\nabla} | n \rangle = \langle m | \dot{n} \rangle \vec{R}$
 wie nach (0.14) ft berechnen

$$(0.26) \quad \vec{V}^{(n)} = \sum_{m \neq n} \frac{\langle n | \vec{\nabla}_R H | m \rangle \times \langle m | \vec{\nabla}_R H | n \rangle}{(E_m - E_n)^2}$$

dies führt auf die wichtige Erkenntnis

$$(0.27) \quad \boxed{\sum_n A_j^{(n)} \equiv 0} \quad \begin{array}{l} \text{Summe aller} \\ \text{Berry Phasen} \\ \text{verschwindet} \end{array}$$

Bem.:

- wir haben hier angenommen, daß der Zustand $|n\rangle$ nicht entartet ist

für entartete Eigenzustände in d-dimensionalen Unterraum

$\Rightarrow$ Berry Vektorpotential wird eine d-dimensionale Matrix

$$(0.28) \quad A_j^{(n)} \rightarrow \underline{A_j^{(n)}} \quad \boxed{\underline{A_j^{(n)}} \Big|_{\kappa, \ell} = i \langle n_\kappa | \partial_j | n_\ell \rangle}$$

kann i.A. nicht - Abelsch sein

$$(0.29) \quad [\underline{A^{(n)}}(\vec{R}_1), \underline{A^{(n)}}(\vec{R}_2)] \neq 0$$

mit $R \rightarrow \vec{R}(t)$ allg. Parameterraum $\vec{R}$

$$(0.19) \quad \dot{f}_n(t) = i \langle n(\vec{R}(t)) | \vec{\nabla}_{\vec{R}} n(\vec{R}(t)) \rangle \cdot \dot{\vec{R}}(t)$$

$$(0.20) \quad f_n(t) = i \int_{\vec{R}(0)}^{\vec{R}(t)} d\vec{R} \cdot \langle n(\vec{R}) | \vec{\nabla}_{\vec{R}} n(\vec{R}) \rangle$$

zeitunabhängige Formulierung der Berry-Phase

besondere Bedeutung werden geschlossene Pfade
im Parameterraum (zeitperiodische Pfade) haben

$$\vec{R}(T) = \vec{R}(0)$$

$$\Delta f_n \equiv f_n(T) - f_n(0) = \int_0^T dt \dot{f}_n(t)$$

$$(0.21) \quad \boxed{\Delta f_n = i \oint_C \langle n(\vec{R}) | \vec{\nabla}_{\vec{R}} n(\vec{R}) \rangle \cdot d\vec{R}}$$

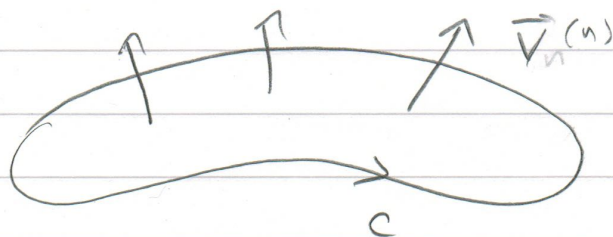
Frage: Das sieht auf den ersten Blick wie
das Umlaufintegral eines Gradientenfeldes
aus was verschwinden würde.
Wann kann $\Delta f_n \neq 0$?

Satz von Stokes (falls $\vec{R}$ in $\mathbb{R}^3$)

$$\Delta g_n = i \oint_C d\vec{R} \langle n | \vec{\nabla} n \rangle$$

$$(0.22) \quad = i \iint_{S(C)} d\vec{S} \left(\vec{\nabla} \times \langle n | \vec{\nabla} n \rangle \right) = - \iint_{S(C)} d\vec{S} \cdot \vec{V}_n^{(n)}$$

$$\Delta g_n \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{Fluß durch Oberfläche } S(C)$$



wie Magnetfeld

Berry Vektorpotential (für Zustand $|n(\vec{R})\rangle$)

$$(0.23) \quad A_j^{(n)} \rightarrow A_j \equiv i \langle n | \partial_j n \rangle = A_j^*$$

Berry curvature ("Magnetfeld")

$$(0.24) \quad F_{jk} = \varepsilon_{jk} \partial_j A_k = i \left(\partial_j \langle n | \partial_k n \rangle - \partial_k \langle n | \partial_j n \rangle \right)$$

$$(0.25) \quad V_i^{(n)} = \varepsilon_{ijk} F_{jk}^{(n)}$$

man findet leicht ($i(\vec{\nabla} \times \langle n | \vec{\nabla} n \rangle)$ ist reell)

$$\vec{V}^{(n)} = \text{Im} \{ \vec{\nabla} \times \langle n | \vec{\nabla} n \rangle \}$$

$$= \dots = \text{Im} \sum_{m \neq n} \langle \vec{\nabla} n | m \rangle \times \langle m | \vec{\nabla} n \rangle$$