

Unitäre und anti-unitäre Operatoren & Wigner-theorem

Eine Transformation $|\psi\rangle \rightarrow G|\psi\rangle$ wird Invarianztransformation genannt, wenn $\forall \{|\psi\rangle, |\phi\rangle\}$ gilt

$$|\langle G\psi | G\phi \rangle| = |\langle \psi | \phi \rangle|$$

Diese sind entweder

unitär $\langle G\psi | G\phi \rangle = \langle \psi | \phi \rangle$

oder

anti-unitär $\langle G\psi | G\phi \rangle = \langle \psi | \phi \rangle^* = \langle \phi | \psi \rangle$

Wigner theorem (1931)

Eine Invarianztransformation ist eine Symmetrie-transformation eines quantenmechanischen Systems mit Hamiltonian H , dann und nur dann, wenn

$$\boxed{G H G^{-1} = H} \quad \text{bzw} \quad \boxed{[H, G] = 0}$$

anti-unitäre Operatoren

$$|\psi\rangle \rightarrow G|\psi\rangle = |G\psi\rangle$$

$$\boxed{\langle G\psi | G\phi \rangle = \langle \psi | \phi \rangle^*}$$

- falls G antiunitär ist, $\Rightarrow G^2$ ist unitär
- jeder anti-unitäre Operator G läßt sich als Produkt eines unitären Operators U und der komplexen Konjugation K schreiben

$$G = UK$$

- Adjungierter Operator eines antiunitären Operators

Def: $G^\oplus$ $\langle G^\oplus \psi | \phi \rangle = \langle \psi | G | \phi \rangle^*$

im Unterschied zur üblichen Definition von G^+ !

damit $\langle G\psi | G\phi \rangle = \langle \psi | G^\oplus G | \phi \rangle^* = \langle \psi | \phi \rangle^*$

$$G^\oplus G = G G^\oplus = 1$$

d.h. $G^\oplus = G^{-1}$

oft Notation G^+
Verwechslungsgefahr!

- Transformation von Operatoren

$$A' = G A G^\oplus \quad |\psi'\rangle = G |\psi\rangle$$

unitär $\langle \psi' | A' | \phi' \rangle = \langle \psi | A | \phi \rangle$

antiunitär $\langle \psi' | A' | \phi' \rangle = \langle \psi | A | \phi \rangle^*$

denn $\langle \psi' | A' | \phi' \rangle = \langle G \psi | G A G^\oplus | G \phi \rangle$

$$= \langle \psi | G^\oplus G A G^\oplus | G \phi \rangle^* = \langle \psi | G^\oplus G A G^\oplus G | \phi \rangle^*$$

$$= \langle \psi | A | \phi \rangle^* \quad \square$$

- antiunitäre Transformationen gehen nicht stetig aus der $\mathbb{I}$ hervor $\Rightarrow$ diskrete Symmetrien

- Zshg zwischen $\oplus$ und $+$

$$\boxed{G = UK \quad G^\oplus = K U^\dagger}$$

denn $\langle G^\oplus \psi | \phi \rangle = \langle K U^\dagger \psi | \phi \rangle$

$$= \langle U^{*+} K \psi | \phi \rangle = \langle K \psi | U^* | \phi \rangle$$

$$= \langle K \psi | U^* K | K \phi \rangle = \langle \psi^* | G^* | \phi^* \rangle$$

$$= (\langle \psi | G | \phi \rangle)^*$$