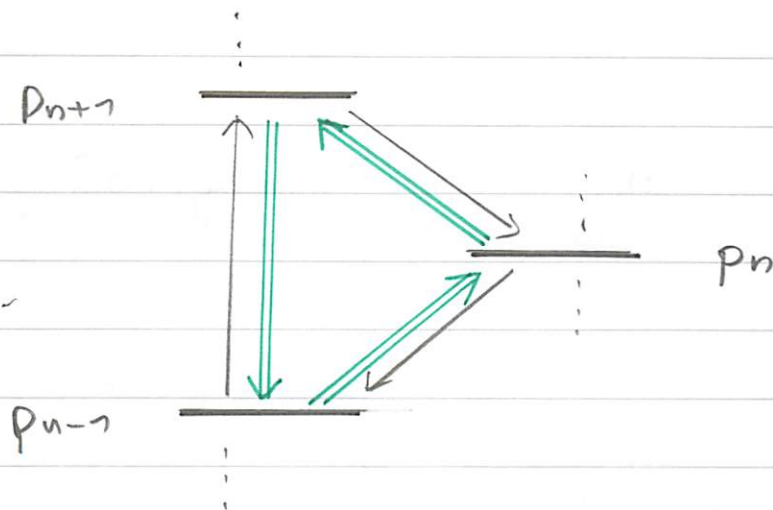


Detailliertes Gleichgewicht ist z.B. nicht gegeben wenn



d.h. wenn es einen ringförmigen Wahrscheinlichkeitsstrom gibt.

I.7. Quantenregressionstheorem! Mehrzeitkorrelationsfunktionen

Frage! Lösung der Liouville-Gleichung für $\rho(t)$ erlaubt es Erwartungswerte wie $\langle a(t) \rangle = \text{Tr}\{\rho a(t)\} = \text{Tr}\{\rho(t) a\}$ zu berechnen. Kann man auch 2-Zeit Korrelationen bestimmen?

$$\langle O_1(t) O_2(t') \rangle = \text{Tr}_{S+R} \{ \chi(0) O_1(t) O_2(t') \}$$

$$O(t) = e^{\frac{i}{\hbar} H t} O e^{-\frac{i}{\hbar} H t}$$

Sei nun $t < t'$ O.B.d.A.

$$t' = t + \tau$$

$$\begin{aligned} \langle O_1(t) O_2(t') \rangle &= \text{Tr}_{S+R} \left\{ \chi(0) e^{\frac{i}{\hbar} H t} O_1 e^{-\frac{i}{\hbar} H (t-t')} O_2 e^{-\frac{i}{\hbar} H t'} \right\} \\ &= \text{Tr}_S \left\{ O_2 \text{Tr}_R \left\{ \underbrace{e^{-\frac{i}{\hbar} H \tau} e^{-\frac{i}{\hbar} H t} \chi(0) e^{\frac{i}{\hbar} H t} O_1 e^{\frac{i}{\hbar} H \tau}}_{= \chi(t)} \right\} \right\} \end{aligned}$$

um definieren wir einen Operator

$$\bar{\chi}(\tau) \equiv e^{-\frac{i}{\hbar} H \tau} \chi(t) O_1 e^{\frac{i}{\hbar} H \tau}$$

dieser genügt der von-Neumann Gleichung

$$\frac{d}{d\tau} \bar{\chi}(\tau) = -\frac{i}{\hbar} [H, \bar{\chi}(\tau)]$$

mit der Anfangsbedingung

$$\bar{\chi}(0) \equiv \chi(t) O_1$$

D.h. abgesehen davon, daß $\bar{\chi}(0)$ kein Dichteoperator ist, d.h. $\text{Tr} \{ \bar{\chi}(0) \} \neq 1$ etc. verhält er sich in der Dynamik wie der statistische Operator des Gesamtsystems $S+R$

Analog zur Ableitung der Mastergleichung für den reduzierten Dichteoperator des Systems $\bar{\rho} = \text{Tr}_R \{ \rho \}$ kann man eine Mastergleichung für $\bar{\chi} = \text{Tr}_R \{ \bar{\chi} \}$ ableiten.

In Born-Markov Näherung findet man

$$\frac{d}{d\tau} \bar{g} = \mathcal{L} \bar{g}$$

d.h. $\bar{g}(\tau) = e^{\mathcal{L}\tau} \bar{g}(0) = e^{\mathcal{L}\tau} g(t) O_1$

$$\Rightarrow \quad (63) \quad \boxed{\langle O_1(t) O_2(t+\tau) \rangle = \text{Tr}_S \{ O_2 e^{\mathcal{L}\tau} [g(t) O_1] \}}$$

Berechnung von 2-Zeitkorrelationen erfordert Lösung der Liouville-Gleichung mit verallgemeinerten Anfangsbedingungen.

Gl. (58) lässt sich in ein handliches Rechenrezept umformen:

Annahme: $\{A_\mu\}$ sei vollständiger Satz von Systemoperatoren

$$\forall O \in \mathcal{H}_S \quad \exists M_{\mu\nu} \text{ so daß}$$

$$\text{Tr} \{ A_\mu \mathcal{L} O \} = \sum_\nu M_{\mu\nu} \text{Tr} \{ A_\nu O \}$$

$$\begin{aligned} \text{d.h.} \quad \frac{d}{dt} \langle A_\mu \rangle &= \text{Tr} \{ \dot{S} A_\mu \} = \text{Tr} \{ A_\mu \mathcal{L} S \} \\ &= \sum_\nu M_{\mu\nu} \text{Tr} \{ A_\nu S \} = \sum_\nu M_{\mu\nu} \langle A_\nu \rangle \end{aligned}$$

in Vektornotation

$$(64) \quad \boxed{\frac{d}{dt} \langle \underline{A} \rangle = \underline{M} \langle \underline{A} \rangle}$$

Dann folgt mit (63) und $\tau > 0$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \langle O_1(t) A_\mu(t+\tau) \rangle &= \frac{d}{d\tau} \text{Tr} \{ A_\mu e^{\mathcal{L}\tau} (g(t) O_1) \} \\ &= \text{Tr} \{ A_\mu \mathcal{L} \underbrace{e^{\mathcal{L}\tau} (g(t) O_1)}_{\equiv \tilde{O}_1} \} = \sum_\nu M_{\mu\nu} \text{Tr} \{ A_\nu \tilde{O}_1 \} \\ &= \sum_\nu M_{\mu\nu} \text{Tr} \{ A_\nu e^{\mathcal{L}\tau} (g(t) O_1) \} \\ &= \sum_\nu M_{\mu\nu} \langle O_1(t) A_\nu(t+\tau) \rangle \end{aligned}$$

d.h.

$$(65) \quad \boxed{\frac{d}{d\tau} \langle O_1(t) \underline{A}(t+\tau) \rangle = \underline{M} \langle O_1(t) \underline{A}(t+\tau) \rangle}$$

Analog kann man zeigen

$$(66) \quad \boxed{\frac{d}{d\tau} \langle \underline{A}(t+\tau) O_2(t) \rangle = \underline{M} \langle \underline{A}(t+\tau) O_2(t) \rangle}$$

Gl. (64) - (66) bilden das Quantenregressionstheorem:

Zweitzeitkorrelationen differenziert nach der größeren Zeit erfüllen dieselbe DGL wie die Mittelwerte!

Beispiel gedämpfter harmonischer Oszillator bei $T=0$

aus Gl. (18) bzw. der adjoint eqs. (13)

$$\frac{d}{dt} \langle a \rangle = -\left(\frac{\gamma}{2} + i\Delta\right) \langle a \rangle$$

Frage $\langle a^\dagger(t) a(t+\tau) \rangle = ?$

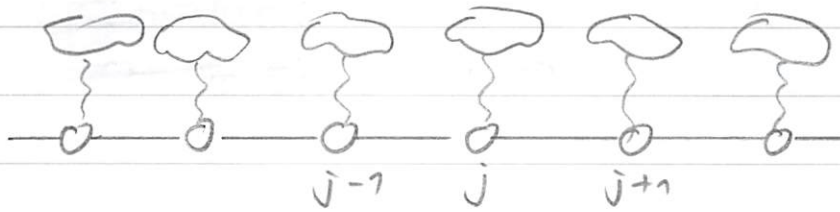
$$\Rightarrow \frac{d}{d\tau} \langle a^\dagger(t) a(t+\tau) \rangle = -\left(\frac{\gamma}{2} + i\Delta\right) \langle a^\dagger(t) a(t+\tau) \rangle$$

Lösung: $\langle a^\dagger(t) a(t+\tau) \rangle = e^{-\left(\frac{\gamma}{2} + i\Delta\right)\tau} \langle a^\dagger(t) a(t) \rangle$

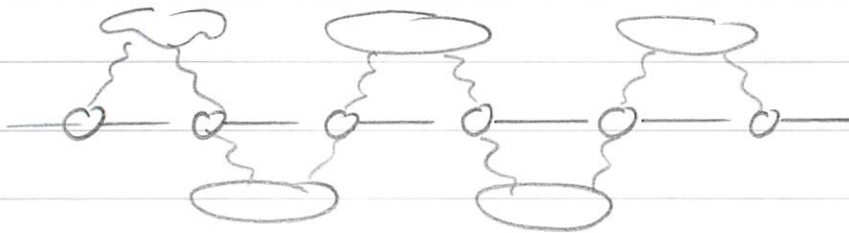
II) Offene Vielteilchensysteme

Bisher: einzelne Quantensysteme (2-Niveau Atom, harm. Oszillator) gekoppelt an Reservoir

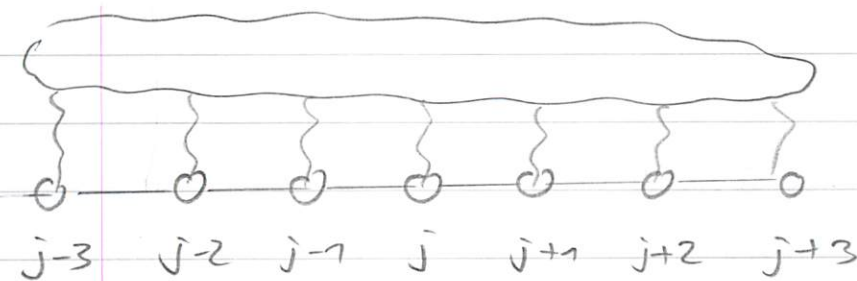
Jetzt: gekoppelte Quantensysteme, d.h. Gittermodelle



lokale
Reservoirs



$$L_\mu \rightarrow L_j = L_j [\hat{a}_j, \hat{a}_{j+1}, \hat{a}_{j+n}] \quad n < L$$



globales
Reservoir

Wir betrachten im Folgenden nicht-wechselwirkende
Systeme mit linearen Lindbladoperatoren

→ Gaußsche Systeme

II.1 Gaußsche Systeme

$$[a_i, a_j^\dagger] = \delta_{ij} \quad \text{Bosonen}$$

$$\{c_i, c_j^\dagger\} = \delta_{ij} \quad \text{Fermionen}$$

(67)	$H = \sum_{ij} a_i^{(\dagger)} h_{ij} a_j$	bilinear Hamiltonoperator
------	--	------------------------------

(68)	$L_\mu = \sum_j (\alpha_j a_j + \beta_j a_j^\dagger)$	linear Lindbladoperator
------	---	----------------------------

analog für Fermionen. Für solche Systeme gilt:

- der stationäre Zustand ρ_0 ist gaußsch falls er eindeutig ist
- falls $\rho(t_0)$ gaußsch ist, so ist auch $\rho(t), t > t_0$, gaußsch

Für einen gaußschen Zustand gilt das Wick-Theorem, d.h. alle höheren Korrelationsfunktionen lassen sich in 2-Punkt Korrelationen $\langle A_1 A_2 \rangle$ zerlegen

$\langle \overbrace{A_1 A_2} \overbrace{A_3 A_4} \rangle = \langle A_1 A_2 \rangle \langle A_3 A_4 \rangle$ $+ \langle \overbrace{A_1 A_3} \overbrace{A_2 A_4} \rangle$ $+ \langle \overbrace{A_1 A_4} \overbrace{A_2 A_3} \rangle$	Bosonen
$\langle \overbrace{C_1 C_2} \overbrace{C_3 C_4} \rangle = \langle C_1 C_2 \rangle \langle C_3 C_4 \rangle$ $- \langle \overbrace{C_1 C_3} \overbrace{C_2 C_4} \rangle$ $+ \langle \overbrace{C_1 C_4} \overbrace{C_2 C_3} \rangle$	Fermionen

Bei Fermionen gibt es einen Vorfaktor $\text{sgn}(P)$ wobei P die Permutation von Operatoren bedeutet die notwendig ist um die Operatoren in die endgültige Anordnung zu bringen.

Im Folgenden seien selbstadjungierte Operatoren betrachtet

$$(69) \quad u_j^1 = a_j + a_j^\dagger \quad u_j^2 = i(a_j - a_j^\dagger)$$

$$(70) \quad w_j^1 = c_j + c_j^\dagger \quad w_j^2 = i(c_j - c_j^\dagger)$$

$$\{\omega_j^\alpha, \omega_k^\beta\} = 2\delta_{jk} \delta_{\alpha\beta} \quad \underline{\text{Majorana Fermionen}}$$

Graßsche Zustände sind vollständig durch 2-Punkt Korrelationen (sog. Einteilchendichtematrix) charakterisiert.

(A) Kovarianzmatrix und Bewegungsgleichung

• Bosonen Γ_b reelle, symmetrische Matrix

$$(71) \quad \begin{aligned} (\Gamma_b)_{jk}^{\alpha\beta} &\equiv \frac{1}{2} \text{Tr} \{ \mathcal{S} (u_j^\alpha u_k^\beta + u_k^\beta u_j^\alpha) \} \quad \alpha, \beta = 1, 2 \\ &= \text{Re} \langle u_j^\alpha u_k^\beta \rangle \in \mathbb{R}^{2n \times 2n} \end{aligned}$$

falls $\langle u_j \rangle \neq 0 \Rightarrow$ Produkte der Erwartungswerte abziehen

• Fermionen

Γ_f reelle, antisymmetrische Matrix

$$(72) \quad (\Gamma_f)^{\alpha\beta}_{jk} = \frac{i}{2} \text{Tr} \{ S(\omega_j^\alpha \omega_k^\beta - \omega_k^\beta \omega_j^\alpha) \} \quad \alpha, \beta = 1, 2$$

$$= -\text{Im} \langle \omega_j^\alpha \omega_k^\beta \rangle \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$$

Die Heisenberg Gleichung kann wie folgt in eine Gleichung für die Kovarianzmatrix umgeschrieben werden

$$\underline{u} \equiv \begin{pmatrix} \vdots \\ u_j^1 \\ u_j^2 \\ \vdots \end{pmatrix} \quad \underline{w} \equiv \begin{pmatrix} \vdots \\ w_j^1 \\ w_j^2 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$(73a) \quad H_b = \underline{u}^T \underline{h}_b \underline{u} \quad \underline{h}_b^T = \underline{h}_b \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$$

$$(73b) \quad H_f = \underline{w}^T \underline{h}_f \underline{w} \quad \begin{matrix} \text{real} \\ \underline{h}_f^T = -\underline{h}_f \in \mathbb{C}^{2n \times 2n} \\ \text{imaginary} \end{matrix}$$

$$(74) \quad L_\mu = \underline{l}_\mu^T \underline{u} \quad \text{bzw} \quad L_\mu = \underline{l}_\mu^T \underline{w}$$

d.h. wenn (ohne Index μ)

$$L = \sum_j \ell_j^1 u_j^1 + \ell_j^2 u_j^2$$

$$\Rightarrow \underline{l}^T = (\dots, \ell_j^1, \ell_j^2, \dots)$$

Nun kann man eine Badmatrix definieren ($j=1, \dots, n$)

$$(75) \quad \underline{\underline{M}} = \sum_{\mu} \underline{l}_{\mu} \otimes \underline{l}_{\mu}^* = \sum_{\mu} \begin{pmatrix} \vdots \\ l_j^1 \\ l_j^2 \\ \vdots \end{pmatrix}_{\mu} \otimes \begin{pmatrix} \vdots \\ l_j^{1*} \\ l_j^{2*} \\ \vdots \end{pmatrix}_{\mu} \in \mathbb{C}^{2n \times 2n}$$

$$\underline{\underline{M}} = \sum_{\mu} \left[\begin{array}{cc|cc} l_1^1 l_1^{1*} & l_1^1 l_1^{2*} & & \\ l_1^2 l_1^{1*} & l_1^2 l_1^{2*} & & \\ \hline & & l_2^1 l_2^{1*} & l_2^1 l_2^{2*} \\ & & l_2^2 l_2^{1*} & l_2^2 l_2^{2*} \\ \hline & & & \ddots \end{array} \right]_{\mu}$$

und weiter

$$(76) \quad \underline{\underline{X}}_b = \underline{\underline{G}} (2 \underline{\underline{h}}_b + 2 \underline{\underline{M}}_i) \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$$

$$\underline{\underline{Y}}_b = 4 \underline{\underline{G}}^T \underline{\underline{M}}_r \underline{\underline{G}} = \underline{\underline{Y}}_b^T \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$$

bzw

$$(77) \quad \underline{\underline{X}}_f = -2i \underline{\underline{h}}_f + 2 \underline{\underline{M}}_r \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$$

$$\underline{\underline{Y}}_f = 4 \underline{\underline{M}}_i = -\underline{\underline{Y}}_f^T \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$$

wobei

$$(78) \quad \underline{\underline{M}}_r = \frac{1}{2} (\underline{\underline{M}} + \underline{\underline{M}}^*) = \underline{\underline{M}}_r^T \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$$

$$\underline{\underline{M}}_i = -\frac{i}{2} (\underline{\underline{M}} - \underline{\underline{M}}^*) = -\underline{\underline{M}}_i^T \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$$

und

$$(79) \quad \underline{\underline{d}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \mathbb{1}_n$$

Mit diesen Matrizen kann die Liouville Gleichung für die Dichtematrix deren Dimension exponentiell mit der Anzahl n der Gitterplätze skaliert auf eine Matrixgleichung der $2n \times 2n$ Kovarianzmatrix reduziert werden

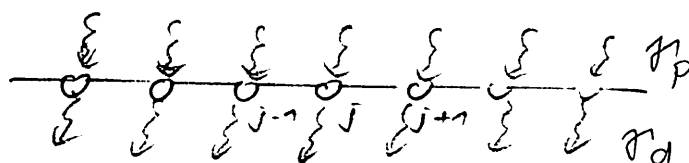
$$(80) \quad \boxed{\frac{d}{dt} \underline{\underline{\Gamma}} = \underline{\underline{X}}^T \underline{\underline{\Gamma}} + \underline{\underline{\Gamma}} \underline{\underline{X}} - \underline{\underline{\Upsilon}}}$$

Der stationäre Zustand bestimmt sich aus der Sylvester-Lyapunov Gleichung

$$(81) \quad \boxed{\underline{\underline{X}}^T \underline{\underline{\Gamma}}_{ss} + \underline{\underline{\Gamma}}_{ss} \underline{\underline{X}} = \underline{\underline{\Upsilon}}}$$

Beispiel

1-dimensionale Kette von Fermionen
mit Pumpen und Verlusten



$$H = 0$$

$$L_j^p = \sqrt{\gamma_p} c_j^\dagger = \sqrt{\gamma} (\omega_j^1 + i\omega_j^2)$$

$$L_j^d = \sqrt{\gamma_d} c_j = \sqrt{\gamma} (\omega_j^1 - i\omega_j^2)$$

$$\Rightarrow l_{pj}^1 = \sqrt{\gamma_p} \quad l_{pj}^2 = i\sqrt{\gamma_p}$$

$$l_{dj}^1 = \sqrt{\gamma_d} \quad l_{dj}^2 = -i\sqrt{\gamma_d}$$

Dann

$$M = \gamma_p \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{matrix}} & 0 & & \\ & 0 & 0 & \ddots \\ & & & \end{bmatrix} + \gamma_p \begin{bmatrix} 0 & 0 & & \\ 0 & 0 & & \\ & 0 & \boxed{\begin{matrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{matrix}} & \\ & & & \ddots \end{bmatrix}$$

$j=1$ $j=2$

$$+ \dots + \gamma_d \begin{bmatrix} & & & \\ & \boxed{\begin{matrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{matrix}} & 0 & \\ & & 0 & \ddots \\ & & & \ddots \end{bmatrix} + \gamma_d \begin{bmatrix} & & & \\ & & & \\ & & \boxed{\begin{matrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{matrix}} & \\ & & & \ddots \end{bmatrix}$$

$j=1$ $j=2$

+ ...

$$M = (j_P + j_d) \begin{bmatrix} \mathbb{1}_2 & & \\ & \mathbb{1}_2 & \\ & & \ddots \end{bmatrix} + (j_P - j_d) \begin{bmatrix} \sigma_y & & \\ & \sigma_y & \\ & & \ddots \end{bmatrix}$$

$$M_r = (j_P + j_d) \begin{bmatrix} \mathbb{1}_2 & & \\ & \mathbb{1}_2 & \\ & & \ddots \end{bmatrix} \quad M_i = (j_P - j_d) \begin{bmatrix} -i\sigma_y & & \\ & -i\sigma_y & \\ & & \ddots \end{bmatrix}$$

$$= M_r^T \quad = -M_i^T$$

$$\Rightarrow X = 2(j_P + j_d) \begin{bmatrix} \mathbb{1}_2 & & \\ & \mathbb{1}_2 & \\ & & \ddots \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$$

$$Y = 4(j_P - j_d) \begin{bmatrix} -i\sigma_y & & \\ & -i\sigma_y & \\ & & \ddots \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$$

stationärer Zustand $X^T \Gamma_{ss} + \Gamma_{ss} X = Y$

$$\Gamma_{ss} = \frac{j_P - j_d}{j_P + j_d} \begin{bmatrix} -i\sigma_y & & \\ & -i\sigma_y & \\ & & \ddots \end{bmatrix} = \frac{j_P - j_d}{j_P + j_d} \begin{bmatrix} 0 & -1 & & \\ 1 & 0 & & \\ & & 0 & -1 \\ & & 1 & 0 \\ & & & \ddots \end{bmatrix}$$

faktoriisiert in Gitterplätzen (wie erwartet)

$$\langle \omega_j^{-1} \omega_j^{-2} \rangle_{ss} = i \frac{j_P - j_d}{j_P + j_d} = -i \langle C_j C_j^\dagger \rangle_{ss} + i \langle C_j^\dagger C_j \rangle_{ss}$$

$$= i (2 \langle C_j^\dagger C_j \rangle_{ss} - 1)$$

$$\Rightarrow \langle C_j^\dagger C_j \rangle_{ss} = \frac{j_P}{j_P + j_d} \quad \text{wie erwartet } \checkmark$$

(B) Dämpfungsspektrum

Das Dämpfungsspektrum kann aus linearen Fluktuationen um den stationären Zustand bestimmt werden

$$\Gamma = \Gamma_{ss} + \delta\Gamma \quad \frac{d}{dt} \Gamma_{ss} = 0$$

$$(82) \quad \boxed{\frac{d}{dt} \delta\Gamma = X^T \delta\Gamma + \delta\Gamma X}$$

Falls $H = 0$ gilt $X^T = X^+ = X$

Diagonalisierung von X mittels unitärer Trafo

$$X = U^{-1} \text{diag}(\lambda_n) U$$

$$\frac{d}{dt} U \delta\Gamma U^{-1} = \text{diag}(\lambda_n) U \delta\Gamma U^{-1}$$

$\Rightarrow$ Eigenwerte von $X^T = X^+ = X$
ergeben das Dämpfungsspektrum

II.2. Translationsinvariante Gauß'sche Systeme

Die $2n \times 2n$ Matrixgleichungen können weiter vereinfacht werden, wenn wir translationsinvariante Probleme betrachten mit periodischen Randbedingungen