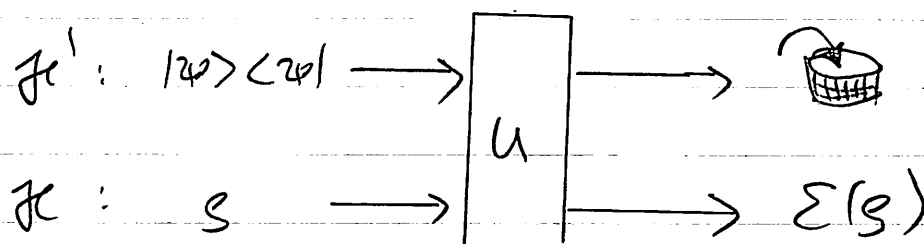


Dann existiert ein Hilbertraum $\mathcal{H}'$ mit $\dim(\mathcal{H}') \leq n^2$
 so daß für einen beliebigen Zustand $|\psi\rangle \in \mathcal{H}'$
 eine unitäre Operation U auf $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}'$ existiert
 mit

$$\mathcal{E}(\rho) = \text{Tr}_{\mathcal{H}'} \left\{ U \left[\rho \otimes |\psi\rangle\langle\psi| \right] U^\dagger \right\}$$

d.h. $\mathcal{E}(\rho) = \sum_m E_m \rho E_m^\dagger$



(D) Das Dämpfungsspektrum

Die Liouvillegleichung

$$\frac{d}{dt} \rho = \mathcal{L} \rho \quad \rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H}) \quad \dim(\mathcal{H}) = N$$

kann als Matrixgleichung aufgefasst werden

$$\rho = \sum_{ij} \rho_{ij} |i\rangle\langle j| \rightarrow |\rho\rangle = \sum_{ij} \rho_{ij} |i\rangle|j\rangle$$

$$\mathcal{L}\rho = -\frac{i}{\hbar} (\mathcal{H}\rho - \rho\mathcal{H}) + \frac{1}{2} \sum_{\mu} 2L_{\mu} \rho L_{\mu}^\dagger - L_{\mu}^\dagger L_{\mu} \rho - \rho L_{\mu}^\dagger L_{\mu}$$

$$\underline{\underline{L}} g \equiv \underline{\underline{L}} |g\rangle$$

$|g\rangle$ in Raum mit Dimension N^2

$$(50) \quad \underline{\underline{L}} = -\frac{i}{\hbar} (\hat{H} \oplus \mathbb{1} - \mathbb{1} \oplus \hat{H}) + \frac{1}{2} \sum_{\mu} \left(2 \hat{L}_{\mu} \oplus \hat{L}_{\mu} - \hat{L}_{\mu}^{\dagger} \hat{L}_{\mu} \oplus \mathbb{1} - \mathbb{1} \oplus \hat{L}_{\mu}^{\dagger} \hat{L}_{\mu} \right)$$

$\underline{\underline{L}}$ ist eine nicht-hermitesche $N \times N^2$ Matrix

Eigenpektrum von $\underline{\underline{L}}$

(51)

$$\underline{\underline{L}} g_{\lambda} = -\lambda g_{\lambda}$$

$$\lambda \neq \lambda^* \quad \text{Eigenwert} \quad \text{Re}[\lambda] \geq 0$$

$$g_{\lambda} \text{ Rechtseigenmatrix von } \underline{\underline{L}}$$

offensichtlich gilt

$$g_{\lambda}(t) = e^{-\lambda t} g_{\lambda}(0)$$

$\exists \lambda = 0$ und g_0 ist der stationäre Zustand

$$\frac{d}{dt} g_0 = \underline{\underline{L}} g_0 = 0$$

Zur Beschreibung der Zeitentwicklung von Erwartungswerten $\langle \hat{A} \rangle$ von Observablen (siehe I.1.c) mittels der adjoint equation definiert man den

Adjungierter Operator $\check{L}$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \langle A \rangle &= \text{Tr} \left\{ \left(\frac{d}{dt} S \right) A \right\} = \text{Tr} \{ (L S) A \} \\ &= \text{Tr} \{ S (\check{L} A) \}\end{aligned}$$

$$(52) \quad \boxed{\begin{aligned}\check{L} \check{S}_\lambda &= -\lambda \check{S}_\lambda \\ \check{S}_\lambda &\text{ Linkeigenmatrix von } L\end{aligned}}$$

$$(53) \quad \begin{array}{l} \text{Es gilt} \\ \boxed{\text{Tr} \{ \check{S}_\lambda \check{S}_{\lambda'} \} = \delta_{\lambda\lambda'}} \end{array} \quad \text{orthogonalität}$$

$$(54) \quad \boxed{S = \sum_{\lambda} c_{\lambda} \check{S}_{\lambda}}$$

$$(55) \quad \begin{array}{l} \text{mit} \\ c_{\lambda} = \text{Tr} \{ \check{S}_{\lambda} S \} \end{array}$$

Man sieht leicht, daß das Eigenwertspektrum von L und $\check{L}$ dasselbe ist

Mit (54) findet man

$$(56) \quad S(t) = \sum_{\lambda} c_{\lambda} \check{S}_{\lambda} e^{-\lambda t} \quad c_{\lambda} = \text{Tr} \{ \check{S}_{\lambda} S(0) \}$$

Man erkennt, daß die Menge der $\text{Re}[\lambda]$ die

Zerfallsraten in den stationären Zustand ρ_0 charakterisieren

$\Rightarrow$ Dämpfungsspektrum

Da

$$\text{Tr} \{ \rho(t) \} = 1 \quad \forall t$$

$\Rightarrow$
(57)

$\rho_0 = 1$	$\check{\rho}_0 = \underline{1}$
$\text{Tr} \{ \rho_\lambda \} \equiv 0$	$\forall \lambda \neq 0$

komplexe Eigenwerte treten stets in komplex konjugierten Paaren auf: $\lambda \leftrightarrow \lambda^*$

hier Beispiel
S. 34a $\rightarrow$

$$\rho(t) = \rho^+(t) = \sum_{\lambda} c_{\lambda} \rho_{\lambda} e^{-\lambda t} = \sum_{\lambda} c_{\lambda}^* \rho_{\lambda}^+ e^{-\lambda^* t}$$

(E) stationäre Zustände

$\exists$ mehrere stationäre Zustände $\rho_{01}, \dots, \rho_{0n}$
können diese orthogonalisiert werden, d.h.

$$\text{Tr} \{ (\rho_{0i}^+ \rho_{0j})^{1/2} \} = \delta_{ij}$$

Alle konvexen Summen aus den ρ_{0i} sind dann stationäre Zustände

$$\rho_0 = \sum_j \alpha_j \rho_{0j} \quad \alpha_j \geq 0 \quad \sum_j \alpha_j = 1$$

Bspl: 2-Niveaumatom (Spin $1/2$) mit
Zerfall und Dephasierung

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_S = & \frac{g}{2}(\bar{n}+1)(2\sigma^-\sigma\sigma^+ - \sigma^+\sigma^-\sigma - \sigma\sigma^+\sigma^-) \\ & + \frac{g}{2}\bar{n}(2\sigma^+\sigma\sigma^- - \sigma^-\sigma^+\sigma - \sigma\sigma^-\sigma^+) \\ & + \frac{g_d}{2}(2\sigma_z\sigma\sigma_z - 2\sigma) \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}_{S_2} = -\lambda S_2$$

hier: $S_0 = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{2\bar{n}+1} \sigma_z \right] \quad \lambda = 0$

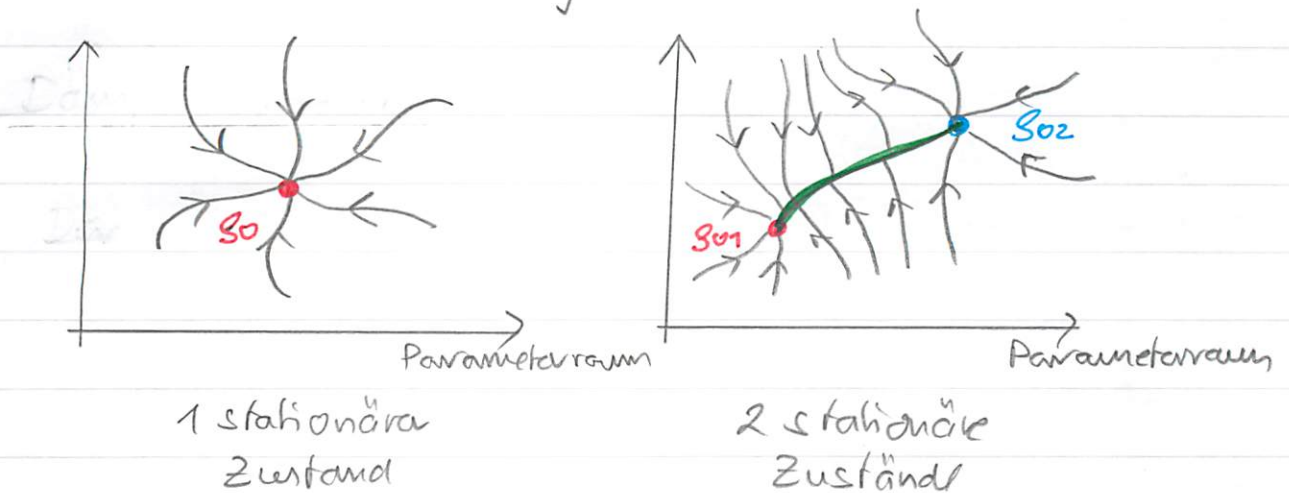
$$S_1 = \sigma_z \quad \lambda_1 = g(2\bar{n}+1)$$

$$S_2 = \sigma_{\pm} \quad \lambda_2 = \frac{g}{2}(2\bar{n}+1) + g_d$$

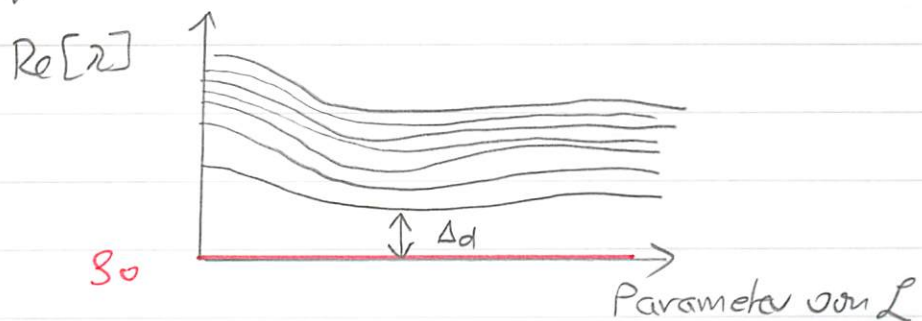
Es gilt dann $\check{s}_{0i} \neq \underline{1}$

Falls nur ein eindeutiger stationärer Zustand existiert ist dieser unabhängig vom Anfangszustand. Bei entarteten stationären Zuständen gilt

$$g(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \sum_j \alpha_j \check{s}_{0j} \quad \alpha_j = \text{Tr} \{ \check{s}_{0j} g(0) \}$$



Dämpfungslücke Δ_d



Δ_d bestimmt die langsamste Zeitskala für die Annäherung an den stationären Zustand.

Dunkelzustände als stationäre Zustände

Wie wir am Beispiel des optischen Pumpens gesehen haben, können stationäre Zustände reine Zustände sein. Man spricht dann von Dunkelzuständen.

Dunkelzustände können entartet sein. Die entsprechenden Räume werden in der Quanteninformation dekoherenzfreie Unterräume genannt.

$$L S_0 = 0 \quad \text{und} \quad S_0 = |\varphi_0\rangle \langle \varphi_0|$$

Für $|\varphi_0\rangle$ muß gelten

$$(58) \quad L_\mu |\varphi_0\rangle = 0 \quad \forall L_\mu$$

$|\varphi_0\rangle$ ist der Grundzustand des sogenannten Parent-Hamiltonians

$$(59) \quad H_P = \sum_\mu L_\mu^\dagger L_\mu \geq 0$$

Die Physik stationärer Zustände kann somit auf die Physik der Grundzustände von Nichtlokalenhamiltonians zurückgeführt werden, wenn der stationäre Zustand ein Dunkelzustand ist.

Bem: H_P ist natürlich nicht eindeutig.

Jedes Polynom in $L_\mu^\dagger L_\mu$ ohne konstanten Term ist ein Parent-Hamiltonian.

thermische Zustände als stationäre Zustände

Eine verwandte Frage ist wann stationäre Zustände eines offenen Systems als thermische Zustände des tabüchlichen mikroskopischen Hamiltonians oder eines effektiven Hamiltonians mit effektiver Temperatur T_{eff} aufgefasst werden können.

Die WW mit dem Reservoir führt typischerweise dazu, daß die Dichtematrix des Systems diagonal in einer bestimmten Basis wird (Pointer-Basis) $\{|\phi_n\rangle\}$

$$\rho_{nm} = \begin{bmatrix} \rho_{00} & & & \\ \nearrow & \rho_{11} & & \\ & \nearrow & \rho_{22} & \\ & & \nearrow & \ddots \\ & & & \rho_{nn} \end{bmatrix}$$

Man spricht von
Dekohärenz

Die Pointer-Basis ist dadurch ausgezeichnet, daß die unitäre Zeitentwicklung des gekoppelten Systems schnell zu orthogonalen Zuständen des Reservoirs führt wobei der Systemzustand nahezu unbeeinträchtigt bleibt

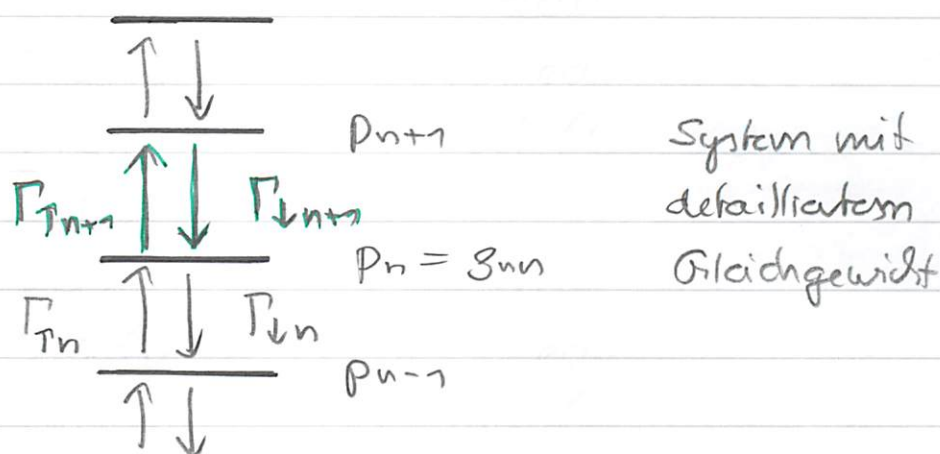
System Reservoir

$$|\phi_n\rangle |A_0\rangle \xrightarrow{U} |\phi_n\rangle |A_n\rangle$$

Wenn $\langle A_n | A_m \rangle \rightarrow \delta_{nm}$ kommt es zum Zerfall von Nichtdiagonalelementen von ρ

(klassische)

Falls die verbleibende Dynamik dem Prinzip des detaillierten Gleichgewichts genügt, kann der stationäre Zustand als thermischer Zustand (Gibbs-Zustand) geschrieben werden



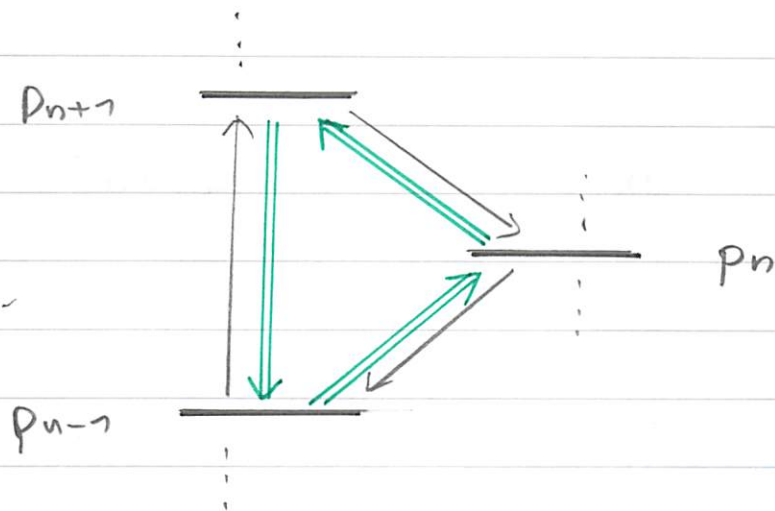
$$(60) \quad \dot{p}_n = -(\Gamma_{\uparrow n+1} + \Gamma_{\downarrow n}) p_n + \Gamma_{\downarrow n+1} p_{n+1} + \Gamma_{\uparrow n} p_{n-1}$$

$$(61) \quad \dot{p}_n = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Gamma_{\downarrow n+1} p_{n+1} = \Gamma_{\uparrow n+1} p_n$$

$$(62) \quad \frac{p_{n+1}}{p_n} = \frac{\Gamma_{\uparrow n+1}}{\Gamma_{\downarrow n+1}} \stackrel{!}{=} \exp \left\{ -\frac{E_{n+1} - E_n}{k_B T_{\text{eff}}} \right\}$$

Die Physik solcher stationärer Zustände kann somit auf die Physik thermischer Zustände von Vielteilchenhamiltonians zurückgeführt werden.

Detailliertes Gleichgewicht ist z.B. nicht gegeben wenn



d.h. wenn es einen ringförmigen Wahrscheinlichkeitsstrom gibt.

I.7. Quantenregressionstheorem! Mehrzeitkorrelationsfunktionen

Frage! Lösung der Liouville-Gleichung für $\rho(t)$ erlaubt es Erwartungswerte wie $\langle a(t) \rangle = \text{Tr} \{ \rho a(t) \} = \text{Tr} \{ \rho(t) a \}$ zu berechnen. Kann man auch 2-Zeit-Korrelationen bestimmen?

$$\langle O_1(t) O_2(t') \rangle = \text{Tr}_{S+R} \{ \chi(0) O_1(t) O_2(t') \}$$

$$O(t) = e^{\frac{i}{\hbar} H t} O e^{-\frac{i}{\hbar} H t}$$