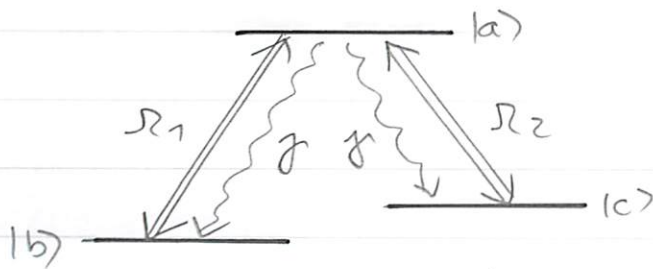


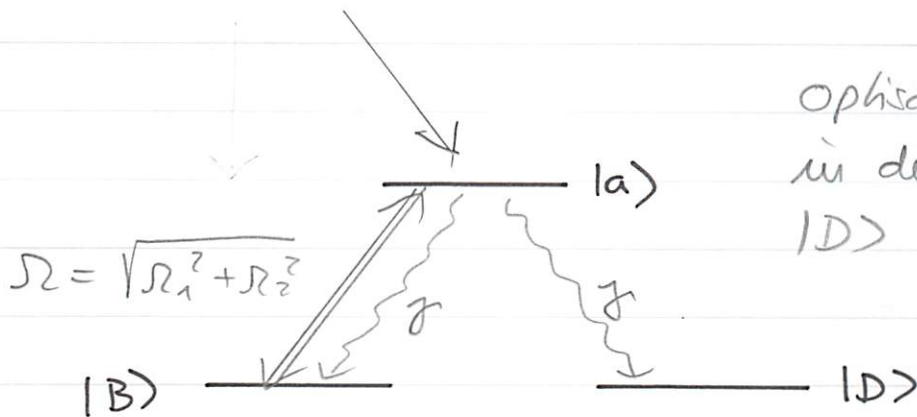
(D) Dunkelzustandspumpen

Der stationäre Zustand kann ein Superpositionszustand sein!



$$|D\rangle \sim R_2 |b\rangle - R_1 |c\rangle \quad (31)$$

$$|B\rangle \sim R_1 |b\rangle + R_2 |c\rangle$$



Optischen Pumpen
in den "Dunkelzustand"
 $|D\rangle$

I.3. Stochastische Wellenfunktionssimulationen

Wenn die Dimension des Hilbertraumes $N = \dim(\mathcal{H})$ groß wird kann die numerische Bestimmung der Dichtematrix schnell impraktikabel werden da $\dim(\rho) = N^2$ und die Lösung der Lindbladgleichung der Diagonalisierung einer $N^2 \times N^2$ Evolutionsmatrix entspricht. Hier bietet sich eine (approximative) stochastische Simulation an. Ausführliche Diskussion z.B. in

H.J. Carmichael "An open-system approach to quantum optics"

K. Mølmer, Y. Castin, J. Dalibard JOSA B 10 (1993) 524-538

H.-P. Breuer & F. Petruccione "The theory of open quantum systems"

$$\dot{g} = -\frac{i}{\hbar} [H, g] + \frac{1}{2} \sum_m \Gamma_m (2 L_m g L_m^\dagger - L_m^\dagger L_m g - g L_m^\dagger L_m)$$

Behauptung

$$(32) \quad \overline{g(t)} = |\phi(t)\rangle \langle \phi(t)|$$

wobei $\overline{(\dots)}$ Mittelung über einen noch näher zu spezifizierenden stochastischen Prozess

Monte-Carlo Prozedur

(i) Man berechne $|\tilde{\phi}(t+\delta t)\rangle$ aus Schrödingergleichung mit nicht-hermiteschem Hamiltonoperator

$$(33) \quad \tilde{H} = H - \frac{i\hbar}{2} \sum_m \Gamma_m L_m^\dagger L_m$$

d.h.

$$|\tilde{\phi}(t+\delta t)\rangle = \left(1 - \frac{i\tilde{H}}{\hbar} \delta t\right) |\phi(t)\rangle$$

(Bem.: numerisch bessere Verfahren siehe Literatur)

Da $\tilde{H}$ nicht hermitisch ist $|\tilde{\phi}(t+\delta t)\rangle$ nicht auf 1 normiert

$$\langle \tilde{\phi}(t+\delta t) | \tilde{\phi}(t+\delta t) \rangle = \langle \phi(t) | \left(1 + \frac{i\tilde{H}^\dagger}{\hbar} \delta t\right) \left(1 - \frac{i\tilde{H}}{\hbar} \delta t\right) | \phi(t) \rangle$$

$$= 1 - \delta p$$

$$(34) \quad \delta p = \delta t \frac{i}{\hbar} \langle \phi(t) | \hat{H} - \hat{H}^\dagger | \phi(t) \rangle = \sum_m \delta p_m$$

mit

$$(35) \quad \delta p_m = \Gamma_m \delta t \langle \phi(t) | \hat{L}_m^\dagger \hat{L}_m | \phi(t) \rangle \geq 0$$

δt muß klein genug gewählt werden, so daß $\delta p \ll 1$

(ii) Man wähle eine Zufallszahl ε_t die in $[0, 1]$ gleichverteilt und für verschiedene Zeiten t unabhängig ist. Je nachdem ob ε_t größer oder kleiner δp ist findet ein sogenannter Quantensprung statt.

Für $\varepsilon_t > \delta p$ kein Sprung

$$(36a) \quad |\phi(t + \delta t)\rangle = |\tilde{\phi}(t + \delta t)\rangle \frac{1}{\sqrt{1 - \delta p}}$$

Für $\varepsilon_t < \delta p$ Sprung

Mit Wahrscheinlichkeit

$$\pi_m \equiv \frac{\delta p_m}{\delta p}$$

wende den Sprungoperator $\hat{L}_m$ an:

$$(36b) \quad |\phi(t + \delta t)\rangle = \sqrt{\pi_m} \hat{L}_m |\phi(t)\rangle \frac{1}{\sqrt{\delta p_m / \delta t}}$$

Für den Fall mehrerer Lindbladgeneratoren müssen daher für jeden Sprung viele Realisierungen durchgeführt werden.

(iii) Fortfahren mit (i)

Äquivalenz zwischen Mastergleichung und Monte-Carlo Verfahren

$$\delta(t) \equiv |\phi(t)\rangle \langle \phi(t)| \quad \text{stochastische Dichtematrix}$$

Wahrscheinlichkeit für keinen Quantensprung zum Zeit t

$$(1 - \delta p)$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \delta(t + \delta t) &= (1 - \delta p) \frac{|\tilde{\phi}(t + \delta t)\rangle \langle \tilde{\phi}(t + \delta t)|}{\sqrt{1 - \delta p} \sqrt{1 - \delta p}} \\ &\quad + \delta p \sum_m \pi_m \frac{\Gamma_m \hat{L}_m |\phi(t)\rangle \langle \phi(t)| \hat{L}_m^\dagger \Gamma_m}{\sqrt{\delta p_m / \delta t} \sqrt{\delta p_m / \delta t}} \end{aligned}$$

$$= |\tilde{\phi}(t + \delta t)\rangle \langle \tilde{\phi}(t + \delta t)|$$

$$+ \delta t \sum_m \Gamma_m \hat{L}_m |\phi(t)\rangle \langle \phi(t)| \hat{L}_m^\dagger$$

$$\begin{aligned}
&= -|\phi(t)\rangle\langle\phi(t)| - i\frac{\delta t}{\hbar} [H, |\phi(t)\rangle\langle\phi(t)|] \\
&\quad - \frac{1}{2} \delta t \sum_m \Gamma_m \left(\hat{L}_m^+ \hat{L}_m |\phi(t)\rangle\langle\phi(t)| \right. \\
&\quad \quad \left. + |\phi(t)\rangle\langle\phi(t)| \hat{L}_m^+ \hat{L}_m \right) \\
&\quad + \frac{1}{2} \delta t \sum_m \Gamma_m \left(2 \hat{L}_m |\phi(t)\rangle\langle\phi(t)| \hat{L}_m^+ \right. \\
&= \sigma(t) - i\frac{\delta t}{\hbar} [H, \sigma(t)] \\
&\quad + \frac{\delta t}{2} \sum_m \Gamma_m \left\{ 2 L_m \sigma(t) L_m^+ - L_m^+ L_m \sigma(t) - \sigma(t) L_m^+ L_m \right\}
\end{aligned}$$

Dies ist aber der Differentialgleichung

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \overline{\sigma(t)} &= -\frac{i}{\hbar} [H, \overline{\sigma(t)}] \\
&\quad - \frac{1}{2} \sum_m \Gamma_m \left\{ 2 L_m \overline{\sigma(t)} L_m^+ - L_m^+ L_m \overline{\sigma(t)} - \overline{\sigma(t)} L_m^+ L_m \right\}
\end{aligned}$$

äquivalent $\square$.

Falls der Anfangszustand ein gemischter Zustand ist
muß $\rho(0)$ gemäß

$$(37) \quad \rho(0) = \sum_m p_m^0 |\phi_m\rangle\langle\phi_m|$$

diagonalisiert werden. Als Anfangszustand wird dann $|\phi_m\rangle$
mit Wahrscheinlichkeit p_m^0 gewählt und über $\{|\phi_m\rangle\}$ gemittelt

I.6. Liouvillian, Halbgruppendynamik und vollständig positive Maps

(A) Liouvillian & Halbgruppendynamik

Dynamik im geschlossenen System

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = H(t) |\psi(t)\rangle$$

$$(38) \quad |\psi(t)\rangle = U(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle$$

$$(39) \quad U(t, t_0) = \mathcal{T} \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t H(\tau) d\tau \right\}$$

$$\text{Da } H = H^\dagger \Rightarrow$$

$$U^{-1}(t, t_0) = U^\dagger(t, t_0) \quad \text{unitäre Map}$$

Die Menge aller $U(t, t')$ bilden eine Gruppe

$$(40) \quad U(t_1, t_2) U(t_2, t_3) = U(t_1, t_3) \quad \forall t_1, t_2, t_3$$

Verallgemeinerung auf Dissystemalizer

$$g(t) = U(t, t_0) g(t_0) U^{-1}(t, t_0)$$

$$\text{Dynamik} \quad \frac{d}{dt} g(t) = -\frac{i}{\hbar} [H(t), g(t)]$$

Liouville-von Neumann Superoperator

$$(41) \quad \frac{d}{dt} g(t) = \mathcal{L} g(t) \quad \mathcal{L} \cdot \equiv -\frac{i}{\hbar} [H(t), \cdot]$$

$$(42) \quad \dots \quad g(t) = T \exp \left\{ \int_{t_0}^t L(\tau) d\tau \right\} g(t_0)$$

Dynamik in einem offenen System

$$(43) \quad \frac{d}{dt} g(t) = -\frac{i}{\hbar} [H(t), g(t)] + D(g(t)) \equiv L(t) g(t)$$

Lösung von (43) ist wieder (42)

$$(44) \quad \boxed{g(t) = V(t, t_0) g(t_0)} \quad t \geq t_0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} V(t, t_0) = L(t) V(t, t_0)$$

$$(45) \quad \boxed{V(t, t_0) = T \exp \left\{ \int_{t_0}^t L(\tau) d\tau \right\}} \quad t \geq t_0$$

$$= e^{L(t-t_0)} \quad \text{für } L(\tau) = \text{const}$$

Aber: $L \neq -\frac{i}{\hbar} [H, \cdot]$, d.h. $V(t, t_0)$ nicht unitär

Es gilt aber noch

$$(46) \quad V(t_1, t_2) V(t_2, t_3) = V(t_1, t_3)$$

falls $t_1 \geq t_2 \geq t_3$

Halbgruppendynamik

Halbgruppe da keine Umkehrung existiert.

$$(47) \quad \frac{d}{dt} \rho = \mathcal{L} \rho \quad \text{ist nicht zeitumkehrinvariant}$$

da $t \rightarrow -t$ zwar durch $H \rightarrow -H$ aber nur durch $T_\mu \rightarrow -T_\mu < 0$ zu einer invarianten Gleichung führt. Letzteres verletzt aber die Positivität von ρ . $T_\mu \rightarrow -T_\mu$ ist i.A. für kleine Zeiten möglich. Für lange Zeiten führt dies aber zu negativen Eigenwerten von ρ , d.h. negativen Wahrscheinlichkeiten.

(B) vollständig positive, sparschaltende Maps

completely positive trace conserving maps
(CPTM)

Behauptung

$$(48) \quad \boxed{\rho(t) = V(t, t_0) \rho(t_0) = \sum_m E_m \rho(t_0) E_m^\dagger}$$

Die E_m heißen Kraus-Operatoren

$$\begin{array}{ccc} \rho(0) = \rho_S(0) \otimes \rho_R(0) & \xrightarrow[\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_R]{\text{unitäre Evolution}} & \rho(t) = U(t) \rho_S(0) \otimes \rho_R(0) U^\dagger(t) \\ \downarrow \text{Tr}_R & & \downarrow \text{Tr}_R \\ \rho_S(0) & \xrightarrow[\mathcal{H}_S]{\text{vollst. positive Map}} & \rho_S(t) = V(t) \rho_S(0) \end{array}$$

d.h.

$$V(t) S(0) = \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \langle \phi_{\alpha} | U(t) [S(0) \otimes S_R(0)] U^{\dagger}(t) | \phi_{\beta} \rangle_R$$

was ist

$$S_R(0) = \sum_{\beta} \lambda_{\beta} |\phi_{\beta}\rangle_{RR} \langle \phi_{\beta}|$$

$\Rightarrow$

$$V(t) S(0) = \sum_{\alpha\beta} W_{\alpha\beta}(t) S(0) W_{\alpha\beta}^{\dagger}(t)$$

$\begin{matrix} \parallel & & \parallel \\ E_m & & E_m^+ \end{matrix}$

mit

$$W_{\alpha\beta}(t) = \sqrt{\lambda_{\beta}} \langle \phi_{\alpha} | U(t,0) | \phi_{\beta} \rangle$$

□

Es gilt

$$\begin{aligned} & \sum_{\alpha\beta} W_{\alpha\beta}^{\dagger}(t) W_{\alpha\beta}(t) = \\ &= \sum_{\beta} \lambda_{\beta} \underbrace{\sum_{\alpha} \langle \phi_{\beta} | U^{\dagger}(t,0) | \phi_{\alpha} \rangle \langle \phi_{\alpha} | U(t,0) | \phi_{\beta} \rangle}_{=1} \\ &= \sum_{\beta} \lambda_{\beta} \langle \phi_{\beta} | U^{\dagger} U | \phi_{\beta} \rangle = \sum_{\beta} \lambda_{\beta} = 1 \end{aligned}$$

d.h.

(49)

$$\boxed{\sum_m E_m^{\dagger} E_m = 1}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \text{Tr}\{S\} = 0$$

spurenerhaltend

Bem:

Die Halbgruppendynamik gilt auch noch für nicht-Markovsche Prozesse

(C) Purification und Einbettung einer positiven Map in eine unitäre Map

Purification

Sei g eine Dichtematrix in $\mathcal{H}_A$ mit $\dim(\mathcal{H}_A) = n$.
Dann existiert ein reiner Zustand $|\psi\rangle$ in $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ mit $\dim(\mathcal{H}_B) \leq n$ und

$$g = \text{Tr}_B \{ |\psi\rangle \langle \psi| \}$$

Beweis: $g = \sum_{i=1}^n p_i |\bar{i}\rangle \langle \bar{i}|$

Sei $\{|\bar{i}'\rangle\}$ ONB in $\mathcal{H}_B$

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^n \sqrt{p_i} |\bar{i}\rangle_A \otimes |\bar{i}'\rangle_B$$

(Schmidt-Zerlegung von $|\psi\rangle$)

$$\begin{aligned} \text{Tr}_B \{ |\psi\rangle \langle \psi| \} &= \text{Tr}_B \left(\sum_{ij} \sqrt{p_i p_j} |\bar{i}\rangle \langle \bar{j}|_A \otimes \underbrace{|\bar{i}'\rangle \langle \bar{j}'|_B}_{=\delta_{ij}} \right) \\ &= \sum_i p_i |\bar{i}\rangle_{AA} \langle \bar{i}| \quad \square \end{aligned}$$

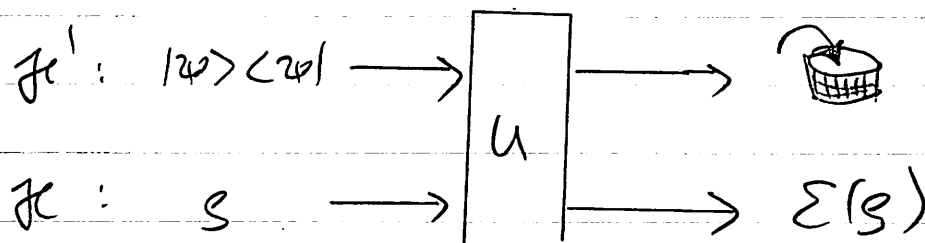
unitäre Einbettung (Stinespring)

Sei $S(\mathcal{H})$ der Raum aller Dichtematrizen in $\mathcal{H}$ mit $\dim(\mathcal{H}) = n$ und $\mathcal{E}: S(\mathcal{H}) \rightarrow S(\mathcal{H})$ eine vollständig positive, sparerhaltende Map

Dann existiert ein Hilbertraum $\mathcal{H}'$ mit $\dim(\mathcal{H}') \leq n^2$
 so daß für einen beliebigen Zustand $|\psi\rangle \in \mathcal{H}'$
 eine unitäre Operation U auf $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}'$ existiert
 mit

$$\mathcal{E}(\rho) = \text{Tr}_{\mathcal{H}'} \left\{ U \left[\rho \otimes |\psi\rangle\langle\psi| \right] U^\dagger \right\}$$

d.h. $\mathcal{E}(\rho) = \sum_m E_m \rho E_m^\dagger$



(D) Das Dämpfungsspektrum

Die Liouville-Gleichung

$$\frac{d}{dt} \rho = \mathcal{L} \rho \quad \rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H}) \quad \dim(\mathcal{H}) = N$$

kann als Matrixgleichung aufgefasst werden

$$\rho = \sum_{ij} \rho_{ij} |i\rangle\langle j| \rightarrow |\rho\rangle = \sum_{ij} \rho_{ij} |i\rangle|j\rangle$$

$$\mathcal{L} \rho = -\frac{i}{\hbar} (H \rho - \rho H) + \frac{1}{2} \sum_{\mu} 2 L_{\mu} \rho L_{\mu}^\dagger - L_{\mu}^\dagger L_{\mu} \rho - \rho L_{\mu}^\dagger L_{\mu}$$