

(c) Die adjoint-equation

Off ist man nicht an der Zeitentwicklung des Zustandes sondern nur an einer bestimmten Observablen $\hat{A}$ interessiert

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \hat{A}(t) \rangle &= \text{Tr} \left\{ \hat{A} \frac{d}{dt} \rho(t) \right\} \\ &= \text{Tr} \left\{ \hat{A} \sum_{\mu} \left(L_{\mu} \rho L_{\mu}^{\dagger} - \frac{1}{2} L_{\mu}^{\dagger} L_{\mu} \rho - \frac{1}{2} \rho L_{\mu}^{\dagger} L_{\mu} \right) \right\} \\ &= \text{Tr} \left\{ \rho \sum_{\mu} \left(L_{\mu}^{\dagger} \hat{A} L_{\mu} - \frac{1}{2} \hat{A} L_{\mu}^{\dagger} L_{\mu} - \frac{1}{2} L_{\mu}^{\dagger} L_{\mu} \hat{A} \right) \right\} \end{aligned}$$

D.h. zur Berechnung von Erwartungswerten $\langle \hat{A}(t) \rangle$ ist es ausreichend die sog. adjoint equation zu lösen

$$(13) \quad \dot{\hat{A}} = \frac{i}{\hbar} [H, \hat{A}] + \frac{1}{2} \sum_{\mu} L_{\mu}^{\dagger} \left(2 L_{\mu} \hat{A} L_{\mu} - L_{\mu}^{\dagger} L_{\mu} \hat{A} - \hat{A} L_{\mu}^{\dagger} L_{\mu} \right)$$

↑
man beachte die umgekehrte Reihenfolge im Vergleich zu (10)

I.2 Wichtige Beispiele

(A) harmonischer Oszillator gekoppelt an ein Bad harmonischer Oszillatoren bei $T \neq 0$

$$(14) \quad \begin{aligned} H_S &= \hbar \omega \left(a^{\dagger} a + \frac{1}{2} \right) & H_B &= \sum_k \hbar \omega_k \left(b_k^{\dagger} b_k + \frac{1}{2} \right) \\ H_{SB} &= \hbar \sum_k g_k (a b_k^{\dagger} + a^{\dagger} b_k) \end{aligned}$$

Reservoir sei im thermischen Zustand $\beta = 1/k_B T$

$$(15) \quad \mathcal{S}_R = \prod_k e^{-\beta \hbar \omega_k b_k^\dagger b_k} (1 - e^{-\beta \hbar \omega_k})$$

Abspaltung der freien Zeitabhängigkeit

$$\tilde{a} = a e^{-i\omega t} \quad \tilde{b} = b e^{-i\omega_k t}$$

Abkürzung $B \equiv \sum_k g_k b_k \quad B^\dagger \equiv \sum_k g_k b_k^\dagger$

$$\tilde{B} = \sum_k g_k b_k e^{-i\omega_k t}$$

identifizieren $\tilde{a} \rightarrow \tilde{S}_1 \quad \tilde{B}^\dagger \rightarrow \tilde{R}_1$
 $\tilde{a}^\dagger \rightarrow \tilde{S}_2 \quad \tilde{B} \rightarrow \tilde{R}_2$

$$H_{SR} \sim S_1 R_1 + S_2 R_2 \quad (\text{Tilda's weglassen})$$

$$\text{Da} \quad \text{Tr} \{ \mathcal{S}_R \hat{b}_k \hat{b}_k \} = \text{Tr} \{ \mathcal{S}_R \hat{b}_k^\dagger \hat{b}_k^\dagger \} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \langle R_1(t) R_1(\tau) \rangle = \langle R_2(t) R_2(\tau) \rangle = 0$$

aber

$$\langle R_1(t) R_2(\tau) \rangle = \sum_{k,e} g_k g_e e^{-i\omega_k t} e^{i\omega_e \tau} \underbrace{\langle b_k b_e^\dagger \rangle}_{=(\bar{n}_k + 1) \delta_{ke}}$$

$$= \sum_k g_k^2 e^{-i\omega_k (t-\tau)}$$

$$(16) \quad \langle a^\dagger(\tau) \rangle \langle R_1(t) R_2(\tau) \rangle \cong \sum_k g_k^2 e^{-i(\omega_k - \omega)(t-\tau)} \cdot \langle a^\dagger(t) \rangle$$

$(\bar{n}(\omega) + 1)$

$$\cong (g + i\Delta) (\bar{n}(\omega) + 1) a^\dagger(t) \delta(t-\tau)$$

sowie

$$a(t) \langle R_2(t) R_1(\tau) \rangle \cong \sum_n g_n^2 e^{i(\omega_n - \omega)(t-\tau)} a(t) \cdot \bar{n}(\omega)$$

(17)

$$\cong (g - i\Delta) \bar{n}(\omega) a(t) \delta(t-\tau)$$

Analog für $\tau \leftrightarrow t$. Somit

$$\begin{aligned} \dot{S}(t)|_{\text{diss}} = & - \int_{t_0}^t d\tau \left\{ \underbrace{\langle R_1(t) R_2(\tau) \rangle}_{\text{green}} \left(\underbrace{a(t) a^\dagger(\tau)}_{\text{green}} \underbrace{g(\tau)}_{\text{green}} - \underbrace{a(t) g(\tau)}_{\text{green}} \underbrace{a^\dagger(\tau)}_{\text{green}} \right) \right. \\ & - \underbrace{\langle R_2(\tau) R_1(t) \rangle}_{\text{red}} \left(\underbrace{a^\dagger(\tau) g(\tau)}_{\text{red}} \underbrace{a(t)}_{\text{red}} - \underbrace{g(\tau) a^\dagger(\tau)}_{\text{red}} \underbrace{a(t)}_{\text{red}} \right) \\ & + \underbrace{\langle R_2(t) R_1(\tau) \rangle}_{\text{red}} \left(\underbrace{a^\dagger(t) a(\tau)}_{\text{red}} \underbrace{g(\tau)}_{\text{red}} - \underbrace{a^\dagger(t) g(\tau)}_{\text{red}} \underbrace{a(\tau)}_{\text{red}} \right) \\ & \left. - \underbrace{\langle R_1(\tau) R_2(t) \rangle}_{\text{green}} \left(\underbrace{a(\tau) g(\tau)}_{\text{green}} \underbrace{a^\dagger(t)}_{\text{green}} - \underbrace{g(\tau) a(\tau)}_{\text{green}} \underbrace{a^\dagger(t)}_{\text{green}} \right) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{S}|_{\text{diss}} = & -\frac{i}{2} \Delta [a^\dagger a, S] \\ & + \frac{\hbar}{2} (\bar{n}(\omega) + 1) (2 a g a^\dagger - a^\dagger a g - g a^\dagger a) \\ & + \frac{\hbar}{2} \bar{n}(\omega) (2 a^\dagger g a - a a^\dagger g - g a a^\dagger) \end{aligned}$$

(18)

$$L_1 = \sqrt{\gamma(\bar{n}+1)} a$$

$$L_2 = \sqrt{\gamma\bar{n}} a^\dagger$$

Bem:

thermischer Beitrag ($\sim \bar{n}$) zur Energieverschiebung fällt raus; bleibt nur Vakuumbeitrag "Lambshift"

Interpretation von Gl. (18)

(setzen $\Delta = 0$ zur Vereinfachung)

$\{|n\rangle\}$ Eigenzustände des harmonischen Oszillators
 $H_S = \hbar\omega(a^\dagger a + \frac{1}{2})$

$$(19) \quad S_{nm} \equiv \langle n | S | m \rangle$$

$$\dot{S}_{nm} \Big|_{\text{diss}} = f(S_{n+1, m+1}, S_{n-1, m-1}, S_{nm})$$

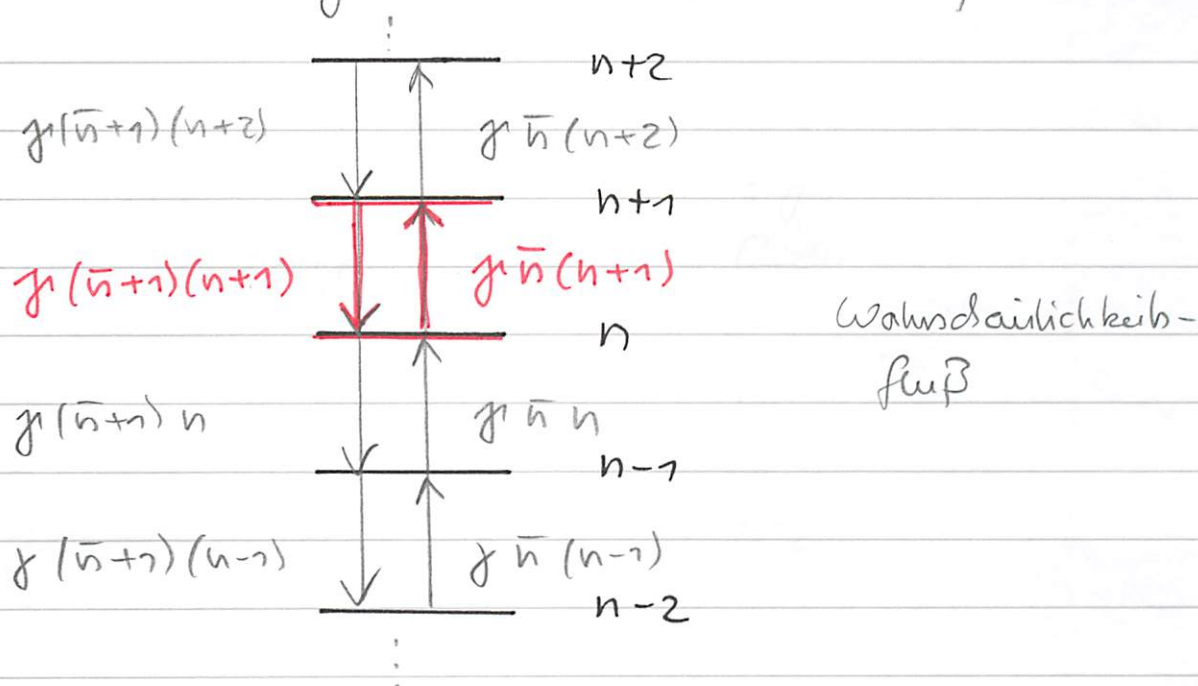
Man kann zeigen, daß alle Nichtdiagonalelemente S_{nm} mit $n \neq m$ im Laufe der Zeit verschwinden (siehe folgendes Beispiel) $\Rightarrow$ Diagonalelemente

$$P_n = S_{nn} = \langle n | S | n \rangle$$

$$(20) \quad \boxed{\frac{d}{dt} P_n = \gamma(\bar{n}+1) [(n+1)P_{n+1} - nP_n] + \gamma\bar{n} [nP_{n-1} - (n+1)P_n]}$$

1. Term: spontane und thermisch induzierte ($\bar{n}$) Übergänge von höheren zu niedrigeren Oszillatorquantenzahlen

2. Term: thermisch induzierte Übergänge von niedrigeren zu höheren Oszillatorquantenzahlen



Stationärer Zustand $\frac{d}{dt} p_n = 0$

$$(21) \quad \boxed{\gamma(n+1)(n+1) p_{n+1} = \gamma \bar{n}(n+1) p_n}$$

detailliertes Gleichgewicht

$$\Rightarrow (22) \quad \frac{p_{n+1}}{p_n} = \frac{\bar{n}}{\bar{n}+1}$$

$$p_n = \left(\frac{\bar{n}}{\bar{n}+1} \right)^n p_0 \quad \text{und} \quad \sum_n p_n = 1$$

d.h.

$$1 = p_0 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}}{\bar{n}+1} \right)^n = p_0 \frac{1}{1 - \frac{\bar{n}}{\bar{n}+1}}$$

$$\Rightarrow p_n = \left(\frac{\bar{n}}{\bar{n}+1} \right)^n \frac{1}{\bar{n}+1}$$

Nun ist $\bar{n} = \bar{n}(\omega) = \frac{e^{-\beta \hbar \omega}}{1 - e^{-\beta \hbar \omega}}$

$$(23) \Rightarrow \underline{\underline{p_n = e^{-\beta \hbar \omega n} (1 - e^{-\beta \hbar \omega})}}$$

ebenfalls thermischer Zustand mit Temperatur T

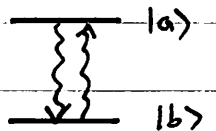
Bem! Systeme in denen detailliertes Gleichgewicht gilt sind in einem Gibbs-Zustand

(B) 2-Niveau Atom gekoppelt an harmonische Oszillatoren bei $T \neq 0$

$$H_S = \frac{1}{2} \hbar \omega \sigma_z \quad H_R = \sum \hbar \omega_k (b_k^\dagger b_k + \frac{1}{2})$$

(24)

$$H_{SR} = \hbar \sum g_k (\sigma^- b_k^\dagger + \sigma^+ b_k)$$



wie unter (A) mit $a \rightarrow \sigma^-$ $a^\dagger \rightarrow \sigma^+$

Unter Weglassen der Energieverschiebungen findet man

(25)

$$\begin{aligned} \dot{S} |_{\text{diss}} = & \frac{\hbar}{2} (\bar{n}(\omega) + 1) (2 \sigma^- S \sigma^+ - \sigma^+ \sigma^- S - S \sigma^+ \sigma^-) \\ & + \frac{\hbar}{2} \bar{n}(\omega) (2 \sigma^+ S \sigma^- - \sigma^- \sigma^+ S - S \sigma^- \sigma^+) \end{aligned}$$

$$L_1 = \sqrt{\gamma(\bar{n}+1)} \sigma^- \quad L_2 = \sqrt{\gamma\bar{n}} \sigma^+$$

$$|a\rangle \equiv |\uparrow\rangle \quad |b\rangle \equiv |\downarrow\rangle$$

$$(26) \quad \begin{cases} \dot{g}_{aa} = -\Gamma(\bar{n}+1)g_{aa} + \Gamma\bar{n}g_{bb} \\ \dot{g}_{bb} = \Gamma(\bar{n}+1)g_{aa} - \Gamma\bar{n}g_{bb} \\ \dot{g}_{ab} = -\frac{\Gamma}{2}(2\bar{n}+1)g_{ab} \end{cases}$$

- Zerfallsrate von $g_{ab} \hat{=} \frac{1}{2} \times$ Summe der Zerfallsraten der Wahrscheinlichkeiten in $|a\rangle$ und $|b\rangle$

zusätzliche energieerhaltende dissipative Prozesse (Dephasing) führen zu

$$\Gamma_{ab} = \frac{1}{2}(\Gamma_{aa} + \Gamma_{bb}) + \Gamma_{\text{deph}}$$

- $g_{ab}(t) = e^{-\frac{\Gamma}{2}(2\bar{n}+1)t} g_{ab}(0)$

Zerfall der Nichtdiagonalelemente (in H_S Basis)
(generische (aber nicht immer zutreffende) Eigenschaft)

$$g \hat{=} \begin{bmatrix} g_{aa} & g_{ab} \\ g_{ab} & g_{bb} \end{bmatrix} \quad \text{generische Dynamik}$$

stationärer Zustand

$$(27) \quad \rho_{ab}^{ss} = 0$$

$$\rho_{aa}^{ss} = \frac{\bar{n}}{2\bar{n}+1} \leq \frac{1}{2}$$

zusätzlicher Phasenzerfall

$$L_{\text{deph}} = \sqrt{\gamma_d} \sigma_z$$

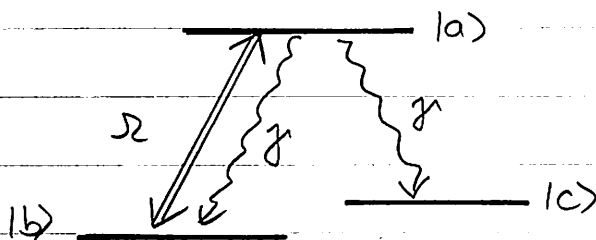
$$(28) \quad \dot{\rho} = \frac{\gamma_d}{2} (2 \sigma_z \rho \sigma_z - 2 \rho)$$

$$\dot{\rho}_{aa} = \dot{\rho}_{bb} = 0$$

(29)

$$\dot{\rho}_{ab} = -\gamma_d \rho_{ab}$$

(c) Optisches Pumpen; Rategleichungen



Kopplung an quantisiertes
Strahlungsfeld
 $\hat{=}$ harmonische Oszillatoren
Reservoir mit $T=0$

$$H = \hbar R (\sigma_{ab} + \sigma_{ba}) \quad \sigma_{ab} = |a\rangle\langle b|$$

$$L_1 = \sqrt{\gamma} \sigma_{ba} \quad L_2 = \sqrt{\gamma} \sigma_{ca}$$

$$\dot{S} = -\frac{i}{\hbar} [H, S] + \frac{\hbar}{2} \left(2 G_{ba} S G_{ab} - G_{aa} S - S G_{aa} \right) + \frac{\hbar}{2} \left(2 G_{ca} S G_{ac} - G_{aa} S - S G_{aa} \right)$$

wobei $G_{ab} = G_{ba}^\dagger$ und $G_{ab} G_{ba} = |a\rangle\langle b| b\rangle\langle a| = |a\rangle\langle a| = G_{aa}$

benutzt wurde

$$\dot{S}_{ab} = -i\Omega (S_{aa} - S_{bb}) - \hbar S_{ab}$$

$$\dot{S}_{ac} = +i\Omega S_{bc} - \hbar S_{ac}$$

$$\dot{S}_{bc} = i\Omega S_{ac}$$

$$\dot{S}_{aa} = -2\hbar S_{aa} - i\Omega (S_{ab} - S_{ba})$$

$$\dot{S}_{cc} = \hbar S_{aa}$$

Off gibt es zusätzlich eine starke Dephasierung auf den optischen Übergängen

$$\hbar S_{ab} \rightarrow (\hbar + \hbar_d) S_{ab} = \hbar_\perp S_{ab}$$

$$\hbar S_{ac} \rightarrow (\hbar + \hbar_d) S_{ac} = \hbar_\perp S_{ac}$$

Nehmen wir an, daß $\hbar_\perp \gg \hbar$ dann gilt
 $|\hbar_\perp S_{ab}| \gg |\dot{S}_{ab}|$ (sowie $|\hbar_\perp S_{ac}| \gg |\dot{S}_{ac}|$)

⇒ Ratengleichungsnäherung

adiabatische Eliminierung der Nichtdiagonalelemente von ρ

$$0 \approx \dot{\rho}_{ab} = -i\Omega(\rho_{aa} - \rho_{bb}) - \gamma_{\perp}\rho_{ab}$$

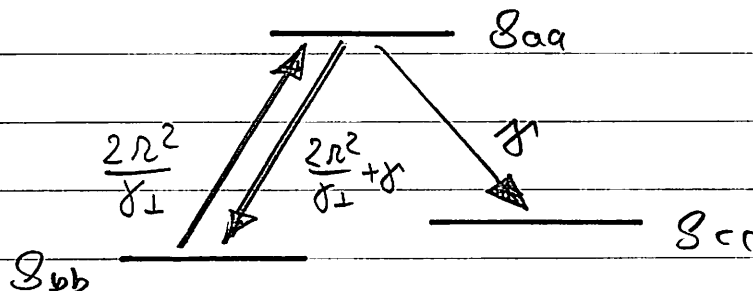
$$\rho_{ab} \approx -\frac{i\Omega}{\gamma_{\perp}}(\rho_{aa} - \rho_{bb})$$

verbleibende Gleichungen = Ratengleichungen

$$\dot{\rho}_{aa} = -\gamma_{\perp}\rho_{aa} - \frac{2\Omega^2}{\gamma_{\perp}}(\rho_{aa} - \rho_{bb})$$

$$(30) \quad \dot{\rho}_{bb} = \gamma_{\perp}\rho_{aa} + \frac{2\Omega^2}{\gamma_{\perp}}(\rho_{aa} - \rho_{bb})$$

$$\dot{\rho}_{cc} = \gamma_{\perp}\rho_{aa}$$



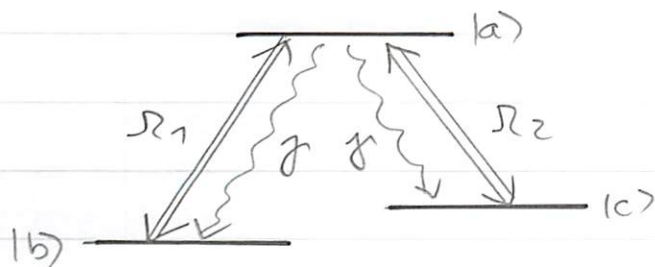
stationärer Zustand

$$\rho_{cc}^{ss} = 1$$

optisches Pumpen

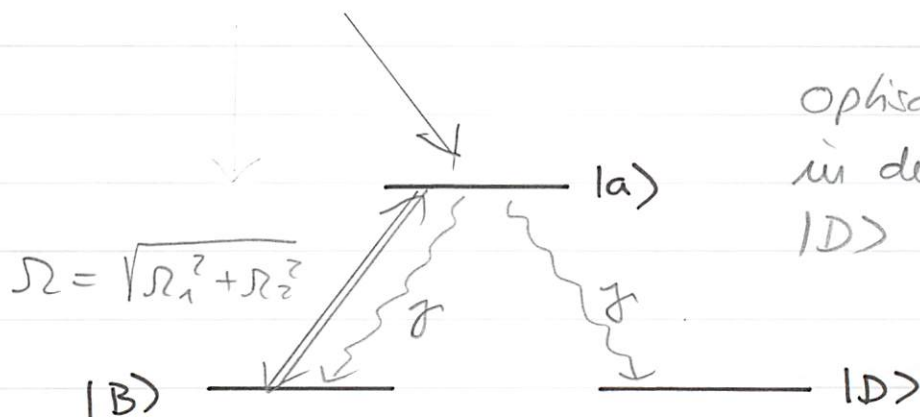
(D) Dunkelzustandspumpen

Der stationäre Zustand kann ein Superpositionszustand sein!



$$|D\rangle \sim R_2 |b\rangle - R_1 |c\rangle \quad (31)$$

$$|B\rangle \sim R_1 |b\rangle + R_2 |c\rangle$$



Optischen Pumpen
in den "Dunkelzustand"
 $|D\rangle$

I.3. Stochastische Wellenfunktionssimulationen

Wenn die Dimension des Hilbertraumes $N = \dim(\mathcal{H})$ groß wird kann die numerische Bestimmung der Dichtematrix schnell impraktikabel werden da $\dim(\rho) = N^2$ und die Lösung der Lindbladgleichung der Diagonalisierung einer $N^2 \times N^2$ Evolutionsmatrix entspricht. Hier bietet sich eine (approximative) stochastische Simulation an.
Ausführliche Diskussion z.B. in

H.J. Carmichael "An open-system approach to quantum optics"

K. Mølmer, Y. Castin, J. Dalibard JOSA B 10 (1993) 524-538

H.-P. Breuer & F. Petruccione "The theory of open quantum systems"