Hinweis zur Übungsabgabe: Alle Aufgaben sind schriftlich zu bearbeiten. Die *handschriftlichen* Lösungen bitte als pdf Dokument in die vorgesehenen Ordner in OLAT hochladen.

Aufgabe 28. *Determinanten und Matrixprodukt (6Punkte)*
Gegeben sind die Matrizen A und B. Berechnen Sie jeweils $\det(A)$, $\det(B)$ und $\det(AB)$. Prüfen Sie jeweils, ob die Matrizen A und B miteinander kommutieren, d.h., ob gilt $AB = BA$.

(a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

(b)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(c)

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix} \qquad B = A^{\mathrm{T}}$$

Dabei ist A^{T} die Transponierte von A.

Aufgabe 29. *Matrizen – lineare Abbildungen von Vektoren (6 Punkte)*
Gegeben sei die Matrix

$$S = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie $\det(S)$ und $\det(S^{\mathrm{T}})$.

(b) Bestimmen Sie für einen beliebigen Vektor $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}$ die Vektoren $S\vec{x}$ und $S^2\vec{x} = S(S\vec{x})$. Geben Sie die Matrix S^2 an.

(c) Gegeben seien die Vektoren $\vec{n} = (-1, -2, 1)^{\mathrm{T}}$ und $\vec{y} = (3, 2, 1)^{\mathrm{T}}$. Erhält S das Skalarprodukt zwischen $\vec{n}$ und $\vec{y}$, gilt also $\vec{n} \cdot \vec{y} = (S\vec{n}) \cdot (S\vec{y})$?

(d) Bestimmen Sie einen beliebigen Vektor $\vec{s}$ senkrecht zu $\vec{n}$ und berechnen Sie $S\vec{s}$.

Aufgabe 30. *Inverse Matrix und Matrixprodukte (6 Punkte)*

(a) Berechnen Sie die Matrizenprodukte AB und BA für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 10 & 4 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass A keine inverse Matrix A^{-1} besitzt.

Bitte wenden!

(b) Die Matrizen C und D sind definiert durch

$$C = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}.$$

Für A definiert wie in Teil (a), zeigen Sie, dass $AC = AD$ gilt, obwohl $C \neq D$ und A nicht die Nullmatrix ist.

Aufgabe 31. *Eigenwerte (6 Punkte)*

(a) Berechnen Sie die Eigenwerte und die normierten Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Gegeben ist die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ d & 0 & a \end{pmatrix}.$$

Dabei sind $a, b, c, d \in \mathbb{R}_{>0}$ positive Konstanten.

(i) Berechnen Sie die Eigenwerte und normierten Eigenvektoren von B.

(ii) Zeigen Sie, dass die normierten Eigenvektoren eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden.

(iii) Es sei nun $c = d$. Zeigen Sie, dass die Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten orthogonal sind.