Hinweis zur Übungsabgabe: Alle Aufgaben sind schriftlich zu bearbeiten. Die *handschriftlichen* Lösungen bitte als pdf Dokument in die vorgesehenen Ordner in OLAT hochladen.

Hinweis zu Aufgabe 24: Diese Aufgabe ist eine *Zusatzaufgabe* für die Sie zusätzliche *8 Punkte* erhalten können. Der Abgabetermin für diese Aufgabe ist der **14.12.2020**.

Aufgabe 20. *Ähnlichkeitssätze (6 Punkte)*
Betrachten Sie die Bewegung einer Punktmasse in einem zentralsymmetrischen Potential $V(r)$.

(a) Skaliert man alle Längen mit einem Faktor λ (d.h. $r \longrightarrow \tilde{r} = \lambda r$) und alle Zeiten mit einem Faktor β (d.h. $t \longrightarrow \tilde{t} = \beta t$), so skaliert die Bahngeschwindigkeit mit einem Faktor λ/β. Wie skalieren Drehimpuls L, Rotationsenergie E_{rot} und kinetische Energie E_{kin}?

(b) Betrachten Sie jetzt den speziellen Fall, dass die potentielle Energie ebenfalls skaliert, und zwar wie

$$V(\lambda r) = \lambda^k V(r) \qquad \text{(homogene Funktion } k\text{−ten Grades)}$$

Zeigen Sie: Wählt man bei einer Längenskalierung mit dem Faktor λ eine Zeitskalierung mit dem Faktor $\beta = \lambda^{1-k/2}$, so skaliert die Gesamtenergie E mit dem Faktor λ^k und alle Bahnkurven gehen bei dieser Skalierung in ähnliche Bahnkurven über, d.h. $\tilde{r}(\varphi) = \lambda r(\varphi)$.

(c) Wie verhalten sich die Umlaufzeiten? Zeigen Sie, dass sich speziell für $k = 2$ und $k = -1$ bekannte Gesetzmäßigkeiten ergeben.

Aufgabe 21. *Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung - 1 (6 Punkte)*
Betrachten Sie die lineare Differentialgleichung 1. Ordnung für die Funktion $y(x)$

$$y' + Py = Q \tag{1}$$

mit gegebenen Funktionen $P(x)$ und $Q(x)$.

(a) Zeigen Sie zunächst, dass die Funktion

$$y_{\text{hom}}(x) = \exp(-I(x)) \tag{2}$$

mit

$$I(x) = \int_{x_0}^{x} P(\xi) d\xi \tag{3}$$

die homogene Gleichung

$$y' + Py = 0 \tag{4}$$

löst. Warum ist dies schon die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung?

(b) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$y_{\text{inh}}(x) = \exp(-I(x)) \int_{x_0}^{x} Q(\xi) \exp(I(\xi)) d\xi \tag{5}$$

eine spezielle Lösung der Differentialgleichung (1) darstellt.

Bitte wenden!

(c) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$x \ln(x)\ y' + y = \ln(x) \tag{6}$$

Hinweise: Folgende Integrale können nützlich sein:

$$\int \frac{1}{x\ln(x)} dx = \ln(\ln(x)), \int \frac{1}{x} \ln(x) dx = \frac{1}{2}[\ln(x)]^2$$

Aufgabe 22. *Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung - 2 (6 Punkte)*
Lösen Sie die folgenden linearen Differentialgleichungen 1. Ordnung. Verwenden Sie dazu auch die Beziehungen aus Aufgabe 21.

(a) $x^2 y' + 3xy = 1$

(b) $y' + y\cos(x) = \sin(2x)$

Aufgabe 23. *Lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung: Cauchy-Euler (6 Punkte)*
Zeigen Sie, dass die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$x^2\, y''(x) + ax\, y'(x) + b\, y(x) = 0 \quad , \quad a, b \in \mathbb{R} \tag{7}$$

im Bereich $0 < x < \infty$ Lösungen vom Typ $y(x) = x^\alpha$ besitzt. Bestimmen Sie die möglichen Werte von α. Welche Bedingung müssen die Koeffizienten a und b erfüllen, damit alle diese α-Werte reell und voneinander verschieden sind? Geben Sie für diesen Fall eine allgemeine Lösung der Differentialgleichung an und konstruieren Sie damit eine Lösung, die für $x = 1$ die Anfangsbedingungen $y(1) = y_1$ und $y'(1) = y_1'$ erfüllt.

Aufgabe 24. ***Zusatzaufgabe:*** *Hüpfender Ball im Gravitationsfeld (8 Punkte)*
Diese Aufgabe ist freiwillig. Sie können hier 8 Zusatzpunkte erhalten. Der Abgabetermin ist der ***14.12.2020****.*

Ein Tischtennisball springt auf einer ebenen harten Platte im Gravitationsfeld.

(a) Führen Sie den Versuch auf verschiedenen harten Unterlagen durch. Sie sollten beobachten, dass die erreichte Höhe und die Dauer der Sprünge mit der Zeit abnehmen. Überlegen Sie anhand der Beobachtungen bei verschiedener Unterlagen, welche der denkbaren Ursachen der Inelastizität (Luftreibung, Energieverlust beim Aufprall auf die Platte) wesentlich ist.

(b) Modellieren Sie diesen Prozess in einem möglichst einfachen Modell, das eine mathematische Behandlung ermöglicht. Dabei soll der relative Energieverlust pro Sprung den konstanten Wert γ haben.

(c) Berechnen Sie in diesem Modell das Verhalten der Sprunghöhe h_n im n-ten Sprung, der Auftreffgeschwindigkeit v_n auf der Platte und die Zeitdauer T_n für den n-ten Sprung.

(d) Untersuchen Sie das Verhalten der gesamten Zeit t_n bis zum Ende des n-ten Sprunges und des dabei insgesamt zurückgelegten Weges s_n für $n \longrightarrow \infty$ und berechnen Sie die Grenzwerte t_∞ und s_∞ (falls existent). Betrachten Sie auch den Grenzfall kleiner Inelastizität.