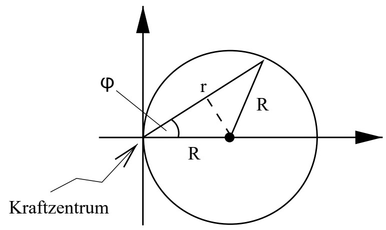
Hinweis zur Übungsabgabe: Alle Aufgaben sind schriftlich zu bearbeiten. Die *handschriftlichen* Lösungen bitte als pdf Dokument in die vorgesehenen Ordner in OLAT hochladen.

Aufgabe 16. *Zentralkraftfeld (6 Punkte)*
Gegeben sei für $r > 0$ ein Zentralkraftfeld

$$\vec{F} = -\frac{c}{r^5}\frac{\vec{r}}{r} \tag{1}$$

mit $c > 0$, wobei r den radialen Abstand vom Kraftzentrum bedeutet. Man zeige, dass es Kreisbahnen durch das Kraftzentrum gibt, die Lösungen der Bewegungsgleichungen darstellen. Welcher Zusammenhang besteht zwischen Drehimpuls L und dem Kreisbahnradius R, und welchen Wert hat die Energie für eine solche Lösung der Bewegungsgleichung?

Hinweis: Verwenden Sie die in der Skizze angedeutete Parametrisierung der Bahnkurve $r = r(\phi)$.



Aufgabe 17. *Runge-Lenz Vektor und Kegelschnitt (6 Punkte)*
In der Vorlesung wurde der Runge-Lenz Vektor

$$\vec{A} = \dot{\vec{r}} \times \vec{L} - \frac{\alpha}{r}\vec{r} \tag{2}$$

für ein Zentralpotential $V(\vec{r}) = -\frac{\alpha}{r}$ eingeführt, der eine Erhaltungsgröße ist.

(a) Zeigen Sie, dass für den Betrag von $\vec{A}$ gilt:

$$A^2 = \vec{A}\cdot\vec{A} = \frac{2L^2}{m}E + \alpha^2 \tag{3}$$

Hinweis: Berechnen Sie zunächst $(\dot{\vec{r}} \times \vec{L}) \cdot \vec{r}$.

(b) Zeigen Sie, dass gilt:

$$\vec{A}\cdot\vec{r} = \frac{L^2}{m} - \alpha r \tag{4}$$

(c) Zeigen Sie, dass aus (4)

$$r(\phi) = \frac{\kappa}{1 + \epsilon\cos\phi} \quad \text{mit} \quad \kappa = \frac{L^2}{m\alpha} \tag{5}$$

folgt, wenn ϕ der Winkel zwischen $\vec{r}$ und $\vec{A}$ ist. Interpretieren Sie die Richtung von $\vec{A}$.

Bitte wenden!

Aufgabe 18. *Trigonometrische Funktionen (6 Punkte)*
Zeigen Sie unter Verwendung der Formel von Moivre

$$e^{i\phi} = \cos\phi + i\sin\phi$$

dass gilt:

$$\begin{aligned}
2\sin\phi_1\cos\phi_2 &= \sin(\phi_1 - \phi_2) + \sin(\phi_1 + \phi_2), && (6)\\
2\cos\phi_1\cos\phi_2 &= \cos(\phi_1 - \phi_2) + \cos(\phi_1 + \phi_2), && (7)\\
2\sin\phi_1\sin\phi_2 &= \cos(\phi_1 - \phi_2) - \cos(\phi_1 + \phi_2), && (8)\\
e^{i\phi} - 1 &= 2\,i\,e^{i\phi/2}\,\sin(\phi/2), && (9)\\
|e^z|^2 &= \exp\left(2\,\mathrm{Re}[z]\right), && (10)\\
\sum_{n=1}^{N}\exp\left(-2\pi i\frac{n}{N}\right) &= 0, \qquad N \text{ ganzzahlig.} && (11)
\end{aligned}$$

Hinweis zu (11): Endliche geometrische Reihe!

Aufgabe 19. *Komplexe Zahlen (6 Punkte)*

(a) Berechnen Sie Real- und Imaginärteil von $z = \frac{2}{1-e^{i\phi}}$

(b) Berechnen Sie $z = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right)^3$

(c) Wie lautet der natürliche Logarithmus der komplexen Zahl $z = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}$

(d) Beweisen Sie die Identitäten

(i) $\sin(x + iy) = \sin(x)\cosh(y) + i\cos(x)\sinh(y)$

(ii) $\cos(x + iy) = \cos(x)\cosh(y) - i\sin(x)\sinh(y)$

Hinweis: Beachten Sie, dass gilt:

$$\cosh(\phi) = \frac{1}{2}\left(e^{\phi} + e^{-\phi}\right)$$
$$\sinh(\phi) = \frac{1}{2}\left(e^{\phi} - e^{-\phi}\right)$$

(e) Beweisen Sie die Dreiecksungleichung für komplexe Zahlen $|w + z| \leq |w| + |z|$.