Hinweis zur Übungsabgabe: Alle Aufgaben sind schriftlich zu bearbeiten. Die *handschriftlichen* Lösungen bitte als pdf Dokument in die vorgesehenen Ordner in OLAT hochladen.

Aufgabe 13. *Bewegung im eindimensionalen Potential 1 (8 Punkte)*
Eine Punktmasse m bewegt sich reibungsfrei im Potential

$$V(z) = \begin{cases} mgz & , z \geq 0 \\ \infty & , z < 0 \end{cases} \tag{1}$$

mit der Anfangsgeschwindigkeit $\vec{v}_0 = (0, 0, v_0)$ mit $v_0 > 0$ bei $z = 0$. (Für Kenner: Das ist natürlich nichts anderes als der senkrechte Wurf mit elastischer Reflexion an einer horizontalen Platte!)

(a) Skizzieren Sie das Potential. Berechnen Sie die Energie E und die Periode T_p der Bewegung.

(b) Berechnen Sie den Impuls $p = mv$ als Funktion von z und der Energie E und skizzieren Sie die Bahnkurve im Phasenraum $p(z)$. Achten Sie dabei auch auf die Vorzeichen von p bei unterschiedlicher Bewegungsrichtung!

(c) Berechnen Sie die Fläche A, die die Bahn $p(z)$ im Phasenraum umschließt, als Funktion der Energie E und zeigen Sie, dass die Beziehung

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}E} = T_p \tag{2}$$

erfüllt ist.

Aufgabe 14. *Bewegung im eindimensionalen Potential 2 (8 Punkte)*
Ein Teilchen mit der Masse m bewegt sich in dem Potential

$$V(x) = V_0\,(1 - e^{-\alpha x})^2, \qquad (V_0, \alpha > 0) \tag{3}$$

(a) Bestimmen Sie Lage und Tiefe des Potentialminimums und skizzieren Sie das Potential. In welchem Energiebereich erhält man eine gebundene Bewegung?

(b) Berechnen Sie die Periodendauer für eine gebundene Bahn.
Hinweis: Nützlich ist eine Substitution $u = e^{-\alpha x}$ sowie das bestimmte Integral

$$\int_{u_-}^{u_+} \frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{(u - u_-)(u_+ - u)}} = \frac{\pi}{\sqrt{u_+ u_-}} \tag{4}$$

(c) Zeigen Sie, dass die Periodendauer für $\alpha \to 0$, $V_0 \to \infty$ mit konstantem $\alpha^2 V_0$ die Schwingungsdauer eines harmonischen Oszillators ergibt. Warum ist dies so?

Aufgabe 15. *Bewegung im Zentralpotential (8 Punkte)*
Betrachten Sie eine Bewegung im radialsymmetrischen Potential

$$E_{\text{pot}}(r) = \lambda r^n \tag{5}$$

mit ganzzahligem n.

Bitte wenden!

(a) Zeigen Sie, dass unter der Bedingung $n\lambda > 0$ Kreisbahnen $r(t) = r_0$ möglich sind. Berechnen Sie den Bahnradius r_0 bei vorgegebenem Drehimpuls L.

(b) Berechnen Sie die Frequenz $\Omega = 2\pi/T_p$ für den Umlauf auf der Kreisbahn.

(c) Für kleine Abweichungen von einer stabilen Kreisbahn schwingt $r(t)$ um r_0. Wenn Sie das effektive Potential $V_eff(r)$ in der Nähe der stabilen Kreisbahn durch

$$V_{\text{eff}}(r) = V_{\text{eff}}(r_0) + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2 V_{\text{eff}}}{\mathrm{d}r^2}\bigg|_{r=r_0}(r - r_0)^2 \tag{6}$$

ergibt sich approximativ das Potential eines harmonischen Oszillators $m\omega^2/2\ (r - r_0)^2$. Berechnen Sie die Frequenz ω.

(d) Berechnen Sie ω/Ω und zeigen Sie: Für den Fall $n = -1$ (Kepler- oder Coulombpotential) gilt $\omega = \Omega$ und für $n = 2$ (harmonischer Oszillator) gilt $\omega = 2\Omega$.