Hinweis zur Übungsabgabe: Alle Aufgaben sind schriftlich zu bearbeiten. Die *handschriftlichen* Lösungen bitte als pdf Dokument in die vorgesehenen Ordner in OLAT hochladen.

Aufgabe 9. *Partielle Ableitungen (6 Punkte)*
Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen 1. und 2. Ordnung (auch die gemischten zweiten Ableitungen) für folgende Funktionen

(a) $f(x, y) = x^4 - xy^2$

(b) $f(x, y) = A(x)\sin(\omega y)$ mit $\omega \in \mathbb{R} = const$

(c) $g(x, y, z) = \frac{1}{x^2+y^2+z^2} + ax$ mit $a \in \mathbb{R} = const$

Hinweis: Man kann sich die Arbeit erleichtern, indem man die partiellen Ableitungen als f_x usw. schreibt und in Teil (c) die Abkürzung $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ verwendet!

Aufgabe 10. *Bahnkurve in Polarkoordinaten (6 Punkte)*
In einem kartesischen Koordinatensystem $\hat{e}_x$, $\hat{e}_y$ sei die Bahnkurve

$$\vec{r}(t) = v_x t\, \hat{e}_x + (v_y t + y_0)\, \hat{e}_y \tag{1}$$

gegeben.

(a) Zeigen Sie, dass die Bewegung auf einer Geraden $y = ax + b$ erfolgt. Berechnen Sie die Geschwindigkeit $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$.

(b) Beschreiben Sie die gleiche Bahnkurve in ebenen Polarkoordinaten $\hat{e}_r$, $\hat{e}_\varphi$. Bestimmen Sie die Form der Bahn $r = r(\varphi)$, die Zeitabhängigkeit $r(t)$ und $\varphi(t)$ sowie die Radialgeschwindigkeit $\dot{r}$ und die azimutale Geschwindigkeit $r\dot{\varphi}$.

Aufgabe 11. *Wegintegral (6 Punkte)*
Gegeben ist das Vektorfeld

$$\vec{F}(\vec{r}) = (3x^2y^2z, 2x^3yz, \lambda x^3y^2) \qquad \vec{r} = (x, y, z) \tag{2}$$

(a) Berechnen Sie das Kurvenintegral $I_j = \int_{C_j} \vec{F}(\vec{r})\mathrm{d}\vec{r}$ über die beiden Wege C_j von $(0, 0, 0)$ nach $(1, 1, 1)$: $j = 1$: gerade Linie, $j = 2$: Kurve $y = x^2$, $z = x^4$. Für welchen Wert λ_0 des Parameters λ haben die beiden Kurvenintegrale den gleichen Wert?

(b) Berechnen Sie die Rotation $\mathrm{rot}\vec{F}$ des Feldes $\vec{F}(\vec{r})$. Was ergibt sich für den Fall $\lambda = \lambda_0$?

(c) Bestimmen Sie für $\lambda = \lambda_0$ das Potential V , so dass gilt $\vec{F} = -\nabla V$.

Aufgabe 12. *Wurfparabel auf dem sterbenden Asteroiden (6 Punkte)*
Wir befinden uns auf einem Asteroiden, der konstant an Masse verliert. Die Schwerebeschleunigung auf seiner Oberfläche ist daher nicht konstant, sondern verringert sich mit der Zeit gemäß

$$g(t) = g_0 e^{-\gamma t} \qquad \gamma, g_0 > 0. \tag{3}$$

Betrachten Sie den schrägen Wurf einer Punktmasse m von der Oberfläche $z = 0$ bei $t = 0$ mit Anfangsgeschwindigkeit v_{0x} und v_{0z} in horizontale und vertikale Richtung.

Bitte wenden!

(a) Bestimmen Sie die Bahnkurve $x(t)$ und $z(t)$ bis zum Wiederauftreffen auf die Oberfläche bei $z = 0$.

(b) Wie sieht die "deformierte Wurfparabel" $z = z(x)$ aus?

(c) Was ist die Wurfhöhe?