Hinweis: Die nachfolgenden Aufgaben sind im Stil einer Klausur geschrieben. Sie können diese über OLAT zur Korrektur hochladen.

Aufgabe 1.

Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der folgenden Matrizen.

$$F = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$
$$G = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 6 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2.

Sei $f(x,y,z) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ eine skalare Funktion und $F(x,y,z) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ eine vektorwertige Funktion. Für f und die Komponenten F_x, F_y, F_z von F gelte der Satz von Schwarz: $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} g = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} g$, d.h. für alle partiellen Ableitungen ist die Reihenfolge der partiellen Ableitungen vertauschbar. Beweisen Sie folgende Gleichungen

(a) $\operatorname{rot}\operatorname{grad} f = 0 \in \mathbb{R}^3$.

(b) $\operatorname{div}\operatorname{rot} F = 0$.

Aufgabe 3.

(a) Gegeben sei ein harmonischer Oszillator mit Dämpfung γ, der durch die Differentialgleichung

$$\ddot{x}(t) + 2\gamma\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0, \qquad 0 \le \gamma < \omega_0$$

beschrieben wird. Finden Sie die allgemeine Lösung $x(t)$ dieser Differentialgleichung.

(b) Berechnen Sie mit der Lösung aus (a) die Gesamtenergie des Oszillators als Funktion der Zeit. Ist die Energie erhalten? Warum?

(c) Lösen Sie die Differentialgleichung aus Aufgabenteil (a) speziell für die Anfangsbedingungen $x(0) = x_0$ und $\dot{x}_(0) = 0$.

(d) Sei nun ein getriebener harmonischer Oszillator gegeben mit der Differentialgleichung

$$\ddot{y}(t) + \omega_0^2 y(t) = F_0 \sin(\Omega t), \qquad 0 < \omega_0, \qquad \omega_0^2 \neq \Omega^2$$

Finden Sie die allgemeine Lösung $y(t)$ dieser Differentialgleichung.

Bitte wenden!

Aufgabe 4.

Gegeben sei das Vektorfeld

$$\vec{A}(\vec{r}) = (0, 0, \gamma x^2 + \lambda z^3)^\top, \qquad \vec{r} = (x, y, z)^\top \ .$$

(a) Berechnen Sie den Fluss

$$\Phi = \oiint \vec{A} \cdot d\vec{F}$$

durch die Oberfläche eines achsenparallelen Würfels mit Mittelpunkt im Koordinatenursprung und Kantenlänge $2a$.

(b) Berechnen Sie weiterhin das Integral von $\operatorname{div} \vec{A}$ über das Würfelvolumen und vergleichen Sie das Ergebnis mit dem von Teilaufgabe (a).

Aufgabe 5.

Ein Strom fließt in Richtung der z-Achse. Für $\rho \geq a$, ρ ist der Abstand von der z-Achse, fällt die Stromdichte $j(\rho)$, wie

$$j(\rho) = j_0 \frac{e^{-\lambda \rho}}{\rho} \ ,$$

für $\rho < a$ ist sie gleich null.

(a) Begründen Sie, dass das Magnetfeld in azimutale Richtung zeigt, d.h. $\vec{B}(\vec{r}) = B(\rho)\hat{e}_\varphi$.

(b) Berechnen Sie dann mit Hilfe des Satzes von Stokes und der Maxwell Gleichungen das Magnetfeld $\vec{B}$ im ganzen Raum.