

Hinweis zur Übungsabgabe: Alle Aufgaben sind schriftlich zu bearbeiten. Die *handschriftlichen* Lösungen bitte als pdf Dokument in die vorgesehenen Ordner in OLAT hochladen.

Aufgabe 40. *Delta-Funktion (6 Punkte)*

Beweisen Sie die folgenden Formeln, die die Delta-Funktion enthalten:

(a) $x \delta(x) = 0$

(b) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda|x|} \delta(\sin x) dx = \coth(\lambda\pi/2), \quad \lambda > 0$

(c) $\lim_{d \rightarrow 0} \frac{\delta(x+d) - \delta(x-d)}{2d} = \delta'(x)$

Aufgabe 41. *Homogen geladener Kreisring (4 Punkte)*

Beweisen Sie die folgenden Resultate für Integrale, die die Delta-Funktion enthalten:

(a) Berechnen Sie das Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{\lambda x} \delta(1-x^2).$$

(b) Eine Ladung Q sei gleichmäßig auf einem Kreisring mit Radius R verteilt. Geben Sie mit Hilfe der Delta-Funktion einen geschlossenen Ausdruck für die Ladungsverteilung $\varrho(\vec{r})$ an, der keine Konstanten außer Q und R enthält.

Aufgabe 42. *Ladungsverteilung eines Punktdipols (6 Punkte)*

Durch die δ -Funktion und ihre Ableitung δ' ist die Ladungsdichte

$$\rho(\vec{r}) = -p \delta(x) \delta(y) \delta'(z)$$

definiert. Berechnen sie die Gesamtladung $Q = \int \rho(\vec{r}) d^3r$ und das Dipolmoment $\vec{p} = \int \vec{r} \rho(\vec{r}) d^3r$. (Die Integrationen erstrecken sich dabei über den ganzen Raum.)

Aufgabe 43. *Potential einer kugelförmigen Ladungsverteilung (8 Punkte)*

Gegeben sei eine kugelsymmetrische Ladungsverteilung

$$\rho(\vec{r}) = \frac{q_0}{4\pi} \frac{a}{r^2(a+r)^2}$$

wobei r der radiale Abstand vom Koordinatenursprung bedeutet. Berechnen Sie das elektrostatische Potential $\phi(\vec{r})$ mit $\phi(\infty) = 0$ durch Lösen der Poissongleichung in Kugelkoordinaten. Verwenden Sie dabei, dass wegen der Symmetrie $\phi(\vec{r}) = \phi(r)$ gilt. Wie groß ist die Gesamtladung q der Ladungsverteilung?