Hinweis zur Übungsabgabe: Alle Aufgaben sind schriftlich zu bearbeiten. Die *handschriftlichen* Lösungen bitte als ein Dokument in die vorgesehenen Ordner in OLAT hochladen.

Aufgabe 1. *(Skalarprodukt, Vektorprodukt) 6 Punkte*
Gegeben seien die beiden Vektoren

$$\vec{a} = 2\,\hat{e}_x + 2\,\hat{e}_y - 4\,\hat{e}_z, \quad \text{und} \quad \vec{b} = -\hat{e}_x + 4\,\hat{e}_y + \hat{e}_z.$$

(a) Berechnen Sie den Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

(b) Berechnen Sie das Vektorprodukt $\vec{a} \times \vec{b}$.

(c) Verifizieren Sie die Beziehung

$$a^2b^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = (\vec{a} \times \vec{b})(\vec{a} \times \vec{b})$$

durch separates Ausrechnen beider Seiten, wobei $a = |\vec{a}|$ und $b = |\vec{b}|$ bedeuten.

Aufgabe 2. *(Skalar- und Spatprodukt von Vektoren) 6 Punkte*
Gegeben sind drei Vektoren mit kartesischen Komponenten

$$\vec{a} = (2, 1, 3), \quad \vec{b} = (2, 1, 2), \quad \vec{c} = (x, 1, 1).$$

(a) Bestimmen Sie den Wert von x so, dass der Vektor $\vec{c}$ senkrecht auf dem Summenvektor $\vec{a}+\vec{b}$ steht.

(b) Bestimmen Sie den Wert von x so, dass die drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ in einer Ebene liegen.

Aufgabe 3. *(Dreiecksungleichung) 4 Punkte*
Beweisen Sie die Dreiecksungleichung

$$|a - b| \leq |\vec{a} - \vec{b}| \leq a + b.$$

Aufgabe 4. *(Doppeltes Vektorprodukt) 8 Punkte*
Der Vektor

$$\vec{v} = \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$$

steht senkrecht auf den Vektoren $\vec{a}$ sowie $\vec{b} \times \vec{c}$. Daher liegt er in der Ebene, die durch die Vektoren $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannt wird.

(a) Verwenden Sie diese Eigenschaften, um $\vec{v}$ bis auf eine multiplikative Konstante, die nicht von den Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ abhängt zu bestimmen. Wählen Sie dann einen geeigneten Spezialfall für $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$, um auch noch diese Konstante zu bestimmen. Sie sollten die in der Vorlesung abgeleitete Relation ("bac-cab" Regel) erhalten

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}).$$

(b) Verwenden Sie nun die bac-cab Regel um zu zeigen

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = 0.$$