Hinweis zur Übungsabgabe: Alle Aufgaben sind schriftlich zu bearbeiten. Die *handschriftlichen* Lösungen bitte als pdf Dokument in die vorgesehenen Ordner in OLAT hochladen.

Aufgabe 26. *Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung (6 Punkte)*
Lösen Sie die folgenden linearen Differentialgleichungen 1. Ordnung.

(a) $x^2 y' + 3xy = 1$

(b) $y' + y\cos(x) = \sin(2x)$

Aufgabe 27. *Lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung: Cauchy-Euler (6 Punkte)*
Zeigen Sie, dass die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$x^2\, y''(x) + ax\, y'(x) + b\, y(x) = 0 \quad , \quad a, b \in \mathbb{R} \tag{1}$$

im Bereich $0 < x < \infty$ Lösungen vom Typ $y(x) = x^\alpha$ besitzt. Bestimmen Sie die möglichen Werte von α. Welche Bedingung müssen die Koeffizienten a und b erfüllen, damit alle diese α-Werte reell und voneinander verschieden sind? Geben Sie für diesen Fall eine allgemeine Lösung der Differentialgleichung an und konstruieren Sie damit eine Lösung, die für $x = 1$ die Anfangsbedingungen $y(1) = y_1$ und $y'(1) = y_1'$ erfüllt.

Aufgabe 28. *Inhomogene lineare Differentialgleichung - 1 (6 Punkte)*
Gegeben sei die Differentialgleichung

$$\ddot{x}(t) + 3\dot{x}(t) + 2x(t) = 4\sin(t) + 2\cos(t). \tag{2}$$

(a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung

$$\ddot{x}(t) + 3\dot{x}(t) + 2x(t) = 0. \tag{3}$$

(b) Bestimmen Sie eine einzelne Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (2), mit Hilfe des Ansatzes

$$x(t) = A\cos(t) + B\sin(t), \tag{4}$$

wobei Sie die Konstanten A und B festlegen müssen.

(c) Geben Sie mit Hilfe von (a) und (b) die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (2) an und bestimmen Sie daraus eine spezielle Lösung, die die Anfangsbedingungen $x(0) = 0$ und $\dot{x}(0) = 0$ erfüllt.

Bitte wenden!

Aufgabe 29. *Inhomogene lineare Differentialgleichung - 2 (6 Punkte)*
Gegeben sei die Differentialgleichung

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = \alpha t^2 \tag{5}$$

(a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0. \tag{6}$$

(b) Bestimmen Sie eine einzelne Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (5), mit Hilfe eines geeigneten Polynomansatzes

$$x(t) = A + Bt + Ct^2, \tag{7}$$

wobei Sie die Konstanten A, B und C festlegen müssen.

(c) Geben Sie die allgemeine Lösung $x(t)$ der Differentialgleichung (5) an, sowie eine spezielle Lösung, die die Anfangsbedingungen $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ erfüllt.