Hinweis zur Übungsabgabe: Alle Aufgaben sind schriftlich zu bearbeiten. Die *handschriftlichen* Lösungen bitte als pdf Dokument in die vorgesehenen Ordner in OLAT hochladen.

Aufgabe 22. *Runge-Lenz Vektor und Kegelschnitt (6 Punkte)*
In der Vorlesung wurde der Runge-Lenz Vektor

$$\vec{A} = \dot{\vec{r}} \times \vec{L} - \frac{\alpha}{r}\vec{r} \tag{1}$$

für ein Zentralpotential $V(\vec{r}) = -\frac{\alpha}{r}$ eingeführt, der eine Erhaltungsgröße ist.

(a) Zeigen Sie, dass für den Betrag von $\vec{A}$ gilt:

$$A^2 = \vec{A} \cdot \vec{A} = \frac{2L^2}{m}E + \alpha^2 \tag{2}$$

Hinweis: Berechnen Sie zunächst $(\dot{\vec{r}} \times \vec{L}) \cdot \vec{r}$.

(b) Zeigen Sie, dass gilt:

$$\vec{A} \cdot \vec{r} = \frac{L^2}{m} - \alpha r \tag{3}$$

(c) Zeigen Sie, dass aus (3)

$$r(\phi) = \frac{\kappa}{1 + \epsilon \cos\phi} \quad \text{mit} \quad \kappa = \frac{L^2}{m\alpha} \tag{4}$$

folgt, wenn ϕ der Winkel zwischen $\vec{r}$ und $\vec{A}$ ist. Interpretieren Sie die Richtung von $\vec{A}$.

Aufgabe 23. *Trigonometrische Funktionen (6 Punkte)*
Zeigen Sie unter Verwendung der Formel von Moivre

$$e^{i\phi} = \cos\phi + i\sin\phi$$

dass gilt:

$$\begin{aligned}
2\sin\phi_1\cos\phi_2 &= \sin(\phi_1 - \phi_2) + \sin(\phi_1 + \phi_2), && (5)\\
2\cos\phi_1\cos\phi_2 &= \cos(\phi_1 - \phi_2) + \cos(\phi_1 + \phi_2), && (6)\\
2\sin\phi_1\sin\phi_2 &= \cos(\phi_1 - \phi_2) - \cos(\phi_1 + \phi_2), && (7)\\
e^{i\phi} - 1 &= 2\,i\,e^{i\phi/2}\,\sin(\phi/2), && (8)\\
|e^z|^2 &= \exp\left(2\,\mathrm{Re}[z]\right), && (9)\\
\sum_{n=1}^{N} \exp\left(-2\pi i \frac{n}{N}\right) &= 0, \qquad N \text{ ganzzahlig.} && (10)
\end{aligned}$$

Hinweis zu (10): Endliche geometrische Reihe!

Bitte wenden!

Aufgabe 24. *Komplexe Zahlen (6 Punkte)*

(a) Berechnen Sie Real- und Imaginärteil von $z = \frac{2}{1-e^{i\phi}}$

(b) Berechnen Sie $z = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right)^3$

(c) Wie lautet der natürliche Logarithmus der komplexen Zahl $z = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}$

(d) Beweisen Sie die Identitäten

(i) $\sin(x + iy) = \sin(x)\cosh(y) + i\cos(x)\sinh(y)$

(ii) $\cos(x + iy) = \cos(x)\cosh(y) - i\sin(x)\sinh(y)$

Hinweis: Beachten Sie, dass gilt:

$$\cosh(\phi) = \frac{1}{2}\left(e^{\phi} + e^{-\phi}\right)$$
$$\sinh(\phi) = \frac{1}{2}\left(e^{\phi} - e^{-\phi}\right)$$

(e) Beweisen Sie die Dreiecksungleichung für komplexe Zahlen $|w + z| \leq |w| + |z|$.

Aufgabe 25. *Hüpfender Ball im Gravitationsfeld (6 Punkte)*
Ein Tischtennisball springt auf einer ebenen horizontalen harten Platte im homogenen Gravitationsfeld. Die Reflexion ist inelastisch und die erreichte Höhe und die Dauer der Sprünge nehmen mit der Zeit ab.
Wir beschreiben das Hüpfen in einem minimalen Modell als Bewegung einer Punktmasse m in senkrechter z-Richtung im Potential $V(z) = mgz$. Dabei bleibt die Energie E erhalten, nur im Moment des Aufpralls auf die Platte gibt es eine Energieabnahme ΔE proportional zu E, also $\Delta E = \gamma E$. Untersuchen Sie das Verhalten der Folge der Sprünge $n = 0, 1, 2...$ für die Anfangsposition $z = 0$ und Anfangsgeschwindigkeit $v = v_0$.

(a) Berechnen Sie die Sprunghöhe h_n im n-ten Sprung, die Auftreffgeschwindigkeit v_n auf der Platte und die Zeitdauer T_n für den n-ten Sprung.

(b) Nach dem n-ten Sprung ist insgesamt die Zeit t_n vergangen und dabei wurde der gesamte Weg, s_n zurückgelegt. Berechnen Sie die Grenzwerte t_∞ und s_∞ für $n \to \infty$. Betrachten Sie auch den Grenzfall kleiner Inelastizität γ.

Hinweis: Geometrische Reihe $\sum_{j=0}^{\infty} p^j = 1/(1-p)$ für $|p| < 1$.