Hinweis zur Übungsabgabe: Alle Aufgaben sind schriftlich zu bearbeiten. Die *handschriftlichen* Lösungen bitte als pdf Dokument in die vorgesehenen Ordner in OLAT hochladen.

Aufgabe 19. *Bewegung im eindimensionalen Potential 2 (8 Punkte)*
Ein Teilchen mit der Masse m bewegt sich in dem Potential

$$V(x) = V_0\,(1 - e^{-\alpha x})^2, \qquad (V_0, \alpha > 0) \tag{1}$$

(a) Bestimmen Sie Lage und Tiefe des Potentialminimums und skizzieren Sie das Potential. In welchem Energiebereich erhält man eine gebundene Bewegung?

(b) Berechnen Sie die Periodendauer für eine gebundene Bahn.
Hinweis: Nützlich ist eine Substitution $u = e^{-\alpha x}$ sowie das bestimmte Integral

$$\int_{u_-}^{u_+} \frac{\mathrm{d}u}{u\sqrt{(u-u_-)(u_+-u)}} = \frac{\pi}{\sqrt{u_+u_-}} \tag{2}$$

(c) Zeigen Sie, dass die Periodendauer für $\alpha \to 0$, $V_0 \to \infty$ mit konstantem $\alpha^2 V_0$ die Schwingungsdauer eines harmonischen Oszillators ergibt. Warum ist dies so?

Aufgabe 20. *Bewegung im Zentralpotential 1 (8 Punkte)*
Für die Bewegung eines Teilchens in einem zentralsymmetrischen Potential $V(r)$ bei einer Energie E und einem Drehimpuls L findet man als Bahnkurve

$$r(\varphi) = \frac{L}{\sqrt{2mE}}\,\frac{b}{\cos(b\varphi)} \tag{3}$$

in Polarkoordinaten. Dabei ist b eine eventuell L-abhängige Konstante.

(a) Zeigen Sie, dass folgender Zusammenhang von $r(t)$ und $r(\varphi)$ besteht

$$\frac{dr}{dt} = \frac{L}{mr^2}\frac{dr}{d\varphi}. \tag{4}$$

(b) Bestimmen Sie $V(r)$.

Bitte wenden!

Aufgabe 21. *Bewegung im Zentralpotential 2 (8 Punkte)*
Betrachten Sie eine Bewegung im radialsymmetrischen Potential

$$E_{\mathrm{pot}}(r) = \lambda r^n \tag{5}$$

mit ganzzahligem n.

(a) Zeigen Sie, dass unter der Bedingung $n\lambda > 0$ Kreisbahnen $r(t) = r_0$ möglich sind. Berechnen Sie den Bahnradius r_0 bei vorgegebenem Drehimpuls L.

(b) Berechnen Sie die Frequenz $\Omega = 2\pi/T_p$ für den Umlauf auf der Kreisbahn.

(c) Für kleine Abweichungen von einer stabilen Kreisbahn schwingt $r(t)$ um r_0. Wenn Sie das effektive Potential $V_{\mathrm{eff}}(r)$ in der Nähe der stabilen Kreisbahn nähern durch

$$V_{\mathrm{eff}}(r) = V_{\mathrm{eff}}(r_0) + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2 V_{\mathrm{eff}}}{\mathrm{d}r^2}\bigg|_{r=r_0}(r-r_0)^2, \tag{6}$$

ergibt sich approximativ das Potential eines harmonischen Oszillators $m\omega^2/2\,(r-r_0)^2$. Berechnen Sie die Frequenz ω. Beachten Sie dabei, dass der konstante Term im Potential $V_{\mathrm{eff}}(r_0)$ keinen Einfluss auf die Dynamik hat und entsprechend vernachlässigt werden kann.

(d) Berechnen Sie ω/Ω und zeigen Sie: Für den Fall $n = -1$ (Kepler- oder Coulombpotential) gilt $\omega = \Omega$ und für $n = 2$ (harmonischer Oszillator) gilt $\omega = 2\Omega$.