Hinweis zur Übungsabgabe: Alle Aufgaben sind schriftlich zu bearbeiten. Die *handschriftlichen* Lösungen bitte als ein Dokument in die vorgesehenen Ordner in OLAT hochladen.

Aufgabe 7. *Skalarprodukt, Vektorprodukt (6 Punkte)*
Gegeben seien die beiden Vektoren

$$\vec{a} = 2\hat{e}_x + 3\hat{e}_y - 4\hat{e}_z \quad \text{und} \quad \vec{b} = -\hat{e}_x + 4\hat{e}_y + \hat{e}_z \tag{1}$$

(a) Berechnen Sie den Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

(b) Berechnen Sie das Vektorprodukt $\vec{a} \times \vec{b}$.

(c) Verifizieren Sie die Beziehung

$$a^2b^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = (\vec{a} \times \vec{b})(\vec{a} \times \vec{b}) \tag{2}$$

durch separates Ausrechnen beider Seiten, wobei $a = |\vec{a}|$ und $b = |\vec{b}|$ bedeuten.

Aufgabe 8. *Skalar- und Spatprodukt von Vektoren (6 Punkte)*
Gegeben sind drei Vektoren mit kartesischen Komponenten

$$\vec{a} = (2, 1, 3) \quad \vec{b} = (2, 1, 2) \quad \vec{c} = (x, 1, 1) \tag{3}$$

(a) Bestimmen Sie den Wert von x so, dass der Vektor $\vec{c}$ senkrecht auf dem Summenvektor $\vec{a}+\vec{b}$ steht.

(b) Bestimmen Sie den Wert von x so, dass die drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ in einer Ebene liegen.

Aufgabe 9. *Vektorprodukt Rechenregeln (6 Punkte)*

(a) Beweisen Sie für beliebige Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ die Gleichung

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)^2 = a^2b^2 - \left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)^2. \tag{4}$$

Hinweis: Beide Seiten der Gleichung stellen das Quadrat der Fläche eines aufgespannten Parallelogramms dar!

(b) Beweisen Sie: Wenn $\vec{x} = \vec{x}_0$ die Gleichung

$$\vec{a} \times \vec{x} = \vec{b} \tag{5}$$

löst, dann sind auch alle Vektoren $\vec{x} = \vec{x}_0 + \lambda\vec{a}$ Lösungen. Wo liegen die Endpunkte aller dieser Lösungsvektoren? Was bedeutet die Aussage geometrisch?
Hinweis: Benutzen Sie nach Möglichkeit bei den Beweisen *nicht* die Komponentenschreibweise!

Bitte wenden!

Aufgabe 10. *Levi-Cevita Symbol (6 Punkte)*
Wie in der Vorlesung gezeigt, kann das Vektorprodukt zweier Vektoren mittels des Levi-Cevita Symbols berechnet werden

$$\vec{a} \times \vec{b} = \sum_{i,j,k} \epsilon_{ijk}\, a_i\, b_j\, \hat{e}_k \ . \tag{6}$$

Zeigen Sie unter Verwendung der Eigenschaften des Levi-Cevita Symbols folgende Vektoridentitäten:

(a) Begründen Sie die zyklische Vertauschbarkeit der Vektoren in einem Spatprodukt:

$$\vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) . \tag{7}$$

(b) Beweisen Sie die „bac-cab" Regel aus der Vorlesung:

$$\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \vec{b}\,(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) . \tag{8}$$

(c) Zeigen Sie dann:

$$\vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) = 0 \tag{9}$$

Hinweis: Dies folgt direkt aus der Behauptung von (b) auch Verwendung des Levi-Cevita Symbols.