Hinweis zur Übungsabgabe: Alle Aufgaben sind schriftlich zu bearbeiten. Die *handschriftlichen* Lösungen bitte als pdf Dokument in die vorgesehenen Ordner in OLAT hochladen.

Aufgabe 37. *Matrixinversion (6 Punkte)*
Für quadratische $n \times n$–Matrizen A mit nicht verschwindender Determinante gilt

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} U^{\top}.$$

Dabei ist $U^{\top}$ die Transponierte der Matrix

$$U = \begin{pmatrix} +D_{11} & -D_{12} & \cdots & (-1)^{1+n} D_{1n} \\ -D_{21} & +D_{22} & \cdots & (-1)^{2+n} D_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-1)^{n+1} D_{n1} & (-1)^{n+2} D_{n2} & \cdots & +D_{nn} \end{pmatrix}$$

wobei D_{ik} die Determinante derjenigen Matrix bedeutet, die aus A durch Streichen der i-ten Zeile und k-ten Spalte hervorgeht (man bezeichnet das als eine Unterdeterminante).

(a) Gegeben seien die 2×2 Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie A^{-1} und B^{-1} und zeigen Sie explizit, dass gilt

$$(A\,B)^{-1} = B^{-1}\,A^{-1}.$$

(b) Berechnen Sie die inverse Matrix zu

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 38. *Rotation (6 Punkte)*
Gegeben seien zwei Vektoren $\vec{a}$ and $\vec{b}$, die auch komponentenweise dargestellt werden können:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}.$$

Eine Rotation um die z-Achse um den Winkel θ transformiert die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ in die $\vec{a}'$ und $\vec{b}'$, beschrieben durch die Matrixmultiplikation $\vec{a}' = R_z(\theta)\vec{a}$ und $\vec{b}' = R_z(\theta)\vec{b}$, wobei $R_z(\theta)$ die Rotationsmatrix

$$R_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ist.

Bitte wenden!

(a) Zeigen Sie, dass nach der Rotation der Betrag der Vektoren erhalten bleibt, d.h. dass $|\vec{a}'| = |\vec{a}|$ und $|\vec{b}'| = |\vec{b}|$ ist, wobei

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

ist.

(b) Wenn $c = \vec{a} \cdot \vec{b}$ und $c' = \vec{a}' \cdot \vec{b}'$ ist, zeigen Sie, dass $c = c'$ ist, d.h. dass das Skalarprodukt invariant unter Rotation ist.

(c) Zeigen Sie auch, dass der Winkel ϕ zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gleich dem Winkel ϕ' zwischen $\vec{a}'$ und $\vec{b}'$ ist, d.h. dass auch der Winkel zwischen zwei Vektoren rotationsinvariant ist. Der Winkel ϕ wird gegeben durch

$$\phi = \arccos \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

Aufgabe 39. *Diagonalisierung symmetrischer Matrizen (6 Punkte)*
Die reelle 2×2–Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$$

mit $a \neq 0$, $b \neq 0$ ist symmetrisch und hat gleiche Diagonalelemente.

(a) Bestimmen Sie die Eigenwerte $\lambda_\pm$ und die normierten Eigenvektoren $\vec{x}_\pm$ von A.

(b) Geben Sie eine Matrix Q mit $Q = Q^{-1}$ an, die die Matrix A diagonalisiert, d.h. $Q^{-1}AQ = QAQ = A_{\text{diag}}$ ist diagonal.

(c) Bestimme Sie die Exponentialfunktion der Matrix A, also die Matrix e^A, und zeigen Sie, dass sie sich schreiben lässt als

$$\mathrm{e}^A = \mathrm{e}^a \begin{pmatrix} \cosh b & \sinh b \\ \sinh b & \cosh b \end{pmatrix} .$$

(Hinweis: e^A ist durch eine Taylorreihe definiert.)

Aufgabe 40. *Diagonalisierung nicht-symmetrischer Matrizen (6 Punkte)*
Gegeben sei die relle, quadratische aber nicht symmetrische Matrix A

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

(a) Begründen Sie warum die Eigenwerte der Matrix A und ihrer transponierten $A^\top$ gleich sind und berechnen Sie diese.

(b) Bestimmen Sie die (nicht notwendig normierten) Eigenvektoren $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\}$ von A sowie $\{\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3\}$ von $A^\top$ zu den gemeinsamen Eigenwerten $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$.

(c) $X = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3)$ und $Y = (\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3)$ seien die Matritzen die aus den Eigenvektoren als Spalten gebildet werden. Zeigen Sie durch explizite Rechnung, dass gilt

$$A = X \cdot D \cdot Y^\top, \qquad \text{mit} \quad D = \begin{pmatrix} c_1\lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & c_2\lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & c_3\lambda_3 \end{pmatrix}$$

Die Größen $c_i = 1/(\vec{x}_i \cdot \vec{y}_i)$ sind die inversen Skalarprodukte der Eigenvektoren.