**Hinweis zur Übungsabgabe:** Alle Aufgaben sind schriftlich zu bearbeiten. Die *handschriftlichen* Lösungen bitte als pdf Dokument in die vorgesehenen Ordner in OLAT hochladen.

**Aufgabe 33.** *Determinanten und Matrixprodukt (6Punkte)*
Gegeben sind die Matrizen $A$ und $B$. Berechnen Sie jeweils $\det(A)$, $\det(B)$ und $\det(AB)$. Prüfen Sie jeweils, ob die Matrizen $A$ und $B$ miteinander kommutieren, d.h., ob gilt $AB = BA$.

**(a)**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

**(b)**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

**(c)**

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix} \qquad B = A^{\mathrm{T}}$$

Dabei ist $A^{\mathrm{T}}$ die Transponierte von $A$.

**Aufgabe 34.** *Matrizen – lineare Abbildungen von Vektoren (6 Punkte)*
Gegeben sei die Matrix

$$S = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

**(a)** Berechnen Sie $\det(S)$ und $\det(S^{\mathrm{T}})$.

**(b)** Bestimmen Sie für einen beliebigen Vektor $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}$ die Vektoren $S\vec{x}$ und $S^2\vec{x} = S(S\vec{x})$. Geben Sie die Matrix $S^2$ an.

**(c)** Gegeben seien die Vektoren $\vec{n} = (-1, -2, 1)^{\mathrm{T}}$ und $\vec{y} = (3, 2, 1)^{\mathrm{T}}$. Erhält $S$ das Skalarprodukt zwischen $\vec{n}$ und $\vec{y}$, gilt also $\vec{n} \cdot \vec{y} = (S\vec{n}) \cdot (S\vec{y})$?

**(d)** Bestimmen Sie einen beliebigen Vektor $\vec{s}$ senkrecht zu $\vec{n}$ und berechnen Sie $S\vec{s}$.

**Bitte wenden!**

**Aufgabe 35.** *Inverse Matrix und Matrixprodukte (6 Punkte)*

**(a)** Berechnen Sie die Matrizenprodukte $AB$ und $BA$ für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 10 & 4 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass $A$ keine inverse Matrix $A^{-1}$ besitzt.

**(b)** Die Matrizen $C$ und $D$ sind definiert durch

$$C = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}.$$

Für $A$ definiert wie in Teil (a), zeigen Sie, dass $AC = AD$ gilt, obwohl $C \neq D$ und $A$ nicht die Nullmatrix ist.

**Aufgabe 36.** *Eigenwerte (6 Punkte)*

**(a)** Berechnen Sie die Eigenwerte und die normierten Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

**(b)** Gegeben ist die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ d & 0 & a \end{pmatrix}.$$

Dabei sind $a, b, c, d \in \mathbb{R}_{>0}$ positive Konstanten.

(i) Berechnen Sie die Eigenwerte und normierten Eigenvektoren von $B$.

(ii) Zeigen Sie, dass die normierten Eigenvektoren eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden.

(iii) Es sei nun $c = d$. Zeigen Sie, dass die Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten orthogonal sind.