Hinweis zur Übungsabgabe: Alle Aufgaben sind schriftlich zu bearbeiten. Die *handschriftlichen* Lösungen bitte als pdf Dokument in die vorgesehenen Ordner in OLAT hochladen.

Aufgabe 30. *Resonanzkatastrophe (8 Punkte)*
Die ungedämpfte harmonische Schwingung mit resonantem Antrieb, $\omega_0 = \omega$,

$$\ddot{x} + \omega^2 x = f_0 \cos(\omega t) \tag{1}$$

hat die Lösung

$$x(t) = \frac{f_0 t}{2\omega} \sin(\omega t). \tag{2}$$

(a) Verifizieren Sie, dass dieses $x(t)$ die Schwingungsgleichung löst.

(b) Berechnen Sie für diese Lösung die Oszillator-Energie

$$E = \frac{m}{2} \left(\dot{x}^2 + \omega^2 x^2\right). \tag{3}$$

Diese Energie enthält einen anwachsenden und einen oszillierenden Anteil.

(c) Wie lautet die allgemeine Lösung der Schwingungsgleichung? Konstruieren Sie eine spezielle Lösung für die Anfangsbedingungen $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = v_0$.

Aufgabe 31. *Erzwungene Schwingung (8 Punkte)*
Ein gedämpfter harmonischer Oszillator, der durch zwei harmonische Kräfte unterschiedlicher Frequenz und Amplitude angetrieben wird, sei beschrieben durch die Schwingungsgleichung

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = f_1 \cos(\Omega_1 t) + f_2 \cos(\Omega_2 t). \tag{4}$$

(a) Zeigen Sie, dass diese Gleichung durch $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ gelöst wird, mit den bekannten Lösungen $x_k(t)$ der Differentialgleichungen

$$\ddot{x}_k + 2\gamma\dot{x}_k + \omega_0^2 x_k = f_k \cos(\Omega_k t), \quad k = 1, 2. \tag{5}$$

(b) Wie müssen – bei vorgegebenen Antriebsfrequenzen $\Omega_1 \neq \Omega_2$ – die Antriebsamplituden f_1 und f_2 gewählt werden, damit die Amplituden der Schwingungsanteile $x_1(t)$ und $x_2(t)$ für große Zeiten (also nach Abklingen des Einschwingvorgangs) gleich groß sind?

(c) Zeigen Sie, dass unter den Bedingungen von b) die Lösung in der Form

$$x(t) = 2A \cos\left(\frac{(\Omega_1 + \Omega_2)\,t + \phi_1 + \phi_2}{2}\right) \cos\left(\frac{(\Omega_1 - \Omega_2)\,t + \phi_1 - \phi_2}{2}\right) \tag{6}$$

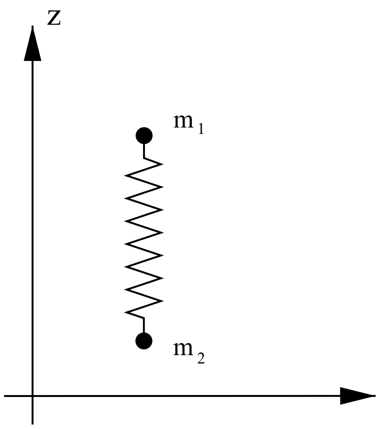
geschrieben werden kann und diskutieren Sie das Verhalten dieser Schwingung.

Hinweise: Man rechnet bequemer mit komplexem z (d.h.$\mathrm{Re}(z) = x$). Es gilt

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right). \tag{7}$$

Bitte wenden!

Aufgabe 32. *Gekoppelte Massenpunkte (8 Punkte)*
Zwei punktförmige Massen befinden sich im Schwerefeld der Erde (konstante Schwerebeschleunigung) und sind durch eine Feder mit der Federkonstanten κ verbunden, die im entspannten Zustand eine Länge L hat.



(a) Welche Kräfte wirken auf m_1 und m_2?

(b) Wenn man m_1 in der Höhe h_1 festhält, in welcher Höhe h_2 befindet sich dann m_2 im Kräftegleichgewicht?

(c) Zur Zeit $t = 0$ werde nun m_1 aus der Höhe h_1 losgelassen. Wie bewegt sich der Schwerpunkt $z = \frac{m_1 z_1 + m_2 z_2}{m_1 + m_2}$ und wie die Relativkoordinate $z_{12} = z_1 - z_2$?