Hinweis zur Übungsabgabe: Alle Aufgaben sind schriftlich zu bearbeiten. Die *handschriftlichen* Lösungen bitte als pdf Dokument in die vorgesehenen Ordner in OLAT hochladen.

Aufgabe 11. *Bahnkurve eines Massenpunktes (6 Punkte)*
Es seien $\vec{a}$ und $\vec{b}$ zwei feste Vektoren und ω eine relle Zahl. Die Bahnkurve eines Massenpunktes sei durch

$$\vec{r}(t) = \vec{a}\cos(\omega t) + \vec{b}\sin(\omega t) \tag{1}$$

gegeben.

(a) Berechnen Sie $\vec{r} \times \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{r}(t)$ (proportional zum Drehimpuls bzgl. des Ursprungs).

(b) Zeigen Sie, dass gilt:

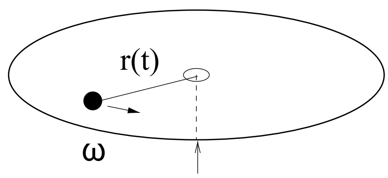
$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\vec{r}(t) = -\omega^2\vec{r}(t). \tag{2}$$

(c) Nun sei die Bahnkurve gegeben durch

$$\vec{r}(t) = \vec{a}\,f(t) + \vec{b}\,g(t), \tag{3}$$

mit zwei reellwertigen und stetig differenzierbaren Funktionen $f(t)$ und $g(t)$. Welche Beziehung muss zwischen $f(t)$ und $g(t)$ bestehen, damit $\vec{r} \times \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{r}(t) = 0$ gilt?

Aufgabe 12. *Längen- und Flächenelemente (6 Punkte)*
Ein mit einem Faden festgehaltener Massenpunkt werde mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω in einer Ebene gedreht. Der Faden, der zum Zeitpunkt $t = 0$ die Länge $r = 0$ hat, wird nun gemäß $r(t) = vt$ mit konstanter Geschwindigkeit verlängert. Berechnen Sie mittels Integration des



Längenelementes $\mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}\vec{r} \cdot \mathrm{d}\vec{r}}$ in Zylinderkoordinaten die Wegstrecke s, die der Massenpunkt bis zur Zeit t zurücklegt, sowie aus $\mathrm{d}F = \frac{1}{2}|\vec{r} \times \mathrm{d}\vec{r}|$ die Fläche die der Faden dabei überstreicht.

Hinweis: Auftretende Integrale können Sie im Bronstein nachschlagen.

Aufgabe 13. *Gradient (6 Punkte)*
Die Gleichungen

$$f_{\mathrm{E}}(x,y) = \frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1 \tag{4}$$

$$f_{\mathrm{H}}(x,y) = \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1 \tag{5}$$

beschreiben eine Ellipse und eine Hyperbel, wobei A, B, α und β Konstanten sind mit $\beta^2 + B^2 = A^2 - \alpha^2$.

Bitte wenden!

(a) Zeigen Sie, dass für den Schnittpunkt gilt

$$\frac{x^2}{A^2\alpha^2} = \frac{y^2}{B^2\beta^2}. \tag{6}$$

(b) Zeigen Sie, dass die Gradienten $\vec{\nabla} f_{\mathrm{E}}$ und $\vec{\nabla} f_{\mathrm{H}}$ im Schnittpunkt senkrecht stehen.

(c) Skizzieren Sie (4) und (5). Welche anschauliche Bedeutung hat das Resultat von Aufgabenteil (b)?

Aufgabe 14. *Nabla Operator (6 Punkte)*
Zeigen Sie unter Zuhilfenahme von Aufgabe 10, dass für zwei Vektorfunktionen $\vec{A}(\vec{r})$ und $\vec{B}(\vec{r})$ gilt:

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \times (\vec{A} \times \vec{B}) &= \vec{A} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) - \vec{B} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \\
&\quad -(\vec{A} \times \vec{\nabla}) \times \vec{B} + (\vec{B} \times \vec{\nabla}) \times \vec{A} \qquad (7) \\
\vec{\nabla}(\vec{A} \cdot \vec{B}) &= \vec{A} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) + (\vec{A} \cdot \vec{\nabla})\vec{B} \\
&\quad +\vec{B} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} \qquad (8)
\end{aligned}$$

Hinweis: Benutzen Sie dabei $\vec{\nabla} = \vec{\nabla}_{\vec{A}} + \vec{\nabla}_{\vec{B}}$, wobei $\vec{\nabla}_{\vec{A}}$ Differentation nur von $\vec{A}$ bedeutet.