

Hinweis: Die nachfolgenden Aufgaben sind im Stil einer Klausur geschrieben. Es gibt keine Abgabe.

Aufgabe 1.

Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der folgenden Matrizen.

$$F = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$
$$G = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 6 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2.

Sei $f(x, y, z) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ eine skalare Funktion und $F(x, y, z) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine vektorwertige Funktion. Für f und die Komponenten F_x, F_y, F_z von F gelte der Satz von Schwarz: $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} g = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} g$, d.h. für alle partiellen Ableitungen ist die Reihenfolge der partiellen Ableitungen vertauschbar. Beweisen Sie folgende Gleichungen

- (a) $\operatorname{rot} \operatorname{grad} f = 0 \in \mathbb{R}^3$.
- (b) $\operatorname{div} \operatorname{rot} F = 0$.

Aufgabe 3.

- (a) Gegeben sei ein harmonischer Oszillator mit Dämpfung γ , der durch die Differentialgleichung

$$\ddot{x}(t) + 2\gamma\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0, \quad 0 \leq \gamma < \omega_0$$

beschrieben wird. Finden Sie die allgemeine Lösung $x(t)$ dieser Differentialgleichung.

- (b) Berechnen Sie mit der Lösung aus (a) die Gesamtenergie des Oszillators als Funktion der Zeit. Ist die Energie erhalten? Warum?
- (c) Lösen Sie die Differentialgleichung aus Aufgabenteil (a) speziell für die Anfangsbedingungen $x(0) = x_0$ und $\dot{x}(0) = 0$.
- (d) Sei nun ein getriebener harmonischer Oszillator gegeben mit der Differentialgleichung

$$\ddot{y}(t) + \omega_0^2 y(t) = F_0 \sin(\Omega t), \quad 0 < \omega_0, \quad \omega_0^2 \neq \Omega^2$$

Finden Sie die allgemeine Lösung $y(t)$ dieser Differentialgleichung.

Bitte wenden!

Aufgabe 4.

Gegeben sei das Vektorfeld

$$\vec{A}(\vec{r}) = (0, 0, \gamma x^2 + \lambda z^3)^\top, \quad \vec{r} = (x, y, z)^\top.$$

- (a) Berechnen Sie den Fluss

$$\Phi = \oiint \vec{A} \cdot d\vec{F}$$

durch die Oberfläche eines achsenparallelen Würfels mit Mittelpunkt im Koordinatenursprung und Kantenlänge $2a$.

- (b) Berechnen Sie weiterhin das Integral von $\operatorname{div} \vec{A}$ über das Würfelvolumen und vergleichen Sie das Ergebnis mit dem von Teilaufgabe (a).

Aufgabe 5.

Ein Strom fließt in Richtung der z -Achse. Für $\rho \geq a$, ρ ist der Abstand von der z -Achse, fällt die Stromdichte $j(\rho)$, wie

$$j(\rho) = j_0 \frac{e^{-\lambda \rho}}{\rho},$$

für $\rho < a$ ist sie gleich null.

- (a) Begründen Sie, dass das Magnetfeld in azimuthale Richtung zeigt, d.h. $\vec{B}(\vec{r}) = B(\rho)\hat{e}_\varphi$.
- (b) Berechnen Sie dann mit Hilfe des Satzes von Stokes und der Maxwell Gleichungen das Magnetfeld $\vec{B}$ im ganzen Raum.