Hinweis zur Übungsabgabe: Alle Aufgaben sind schriftlich zu bearbeiten. Die *handschriftlichen* Lösungen bitte als pdf Dokument in die vorgesehenen Ordner in OLAT hochladen.

Aufgabe 45. *Delta-Funktion (6 Punkte)*
Beweisen Sie die folgenden Formeln, die die Delta-Funktion enthalten:

(a) $x\,\delta(x) = 0$

(b) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda|x|}\,\delta(\sin x)\,\mathrm{d}x = \coth(\lambda\pi/2), \quad \lambda > 0$

(c) $\lim\limits_{d\to 0} \dfrac{\delta(x+d) - \delta(x-d)}{2d} = \delta'(x)$

Aufgabe 46. *Homogen geladener Kreisring (4 Punkte)*
Beweisen Sie die folgenden Resultate für Integrale, die die Delta-Funktion enthalten:

(a) Berechnen Sie das Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\, e^{\lambda x}\,\delta(1 - x^2)\,.$$

(b) Eine Ladung Q sei gleichmäßig auf einem Kreisring mit Radius R verteilt. Geben Sie mit Hilfe der Delta-Funktion einen geschlossenen Ausdruck für die Ladungsverteilung $\varrho\,(\vec{r})$ an, der keine Konstanten außer Q und R enthält.

Aufgabe 47. *Ladungsverteilung eines Punktdipols (6 Punkte)*
Durch die δ–Funktion und ihre Ableitung δ' ist die Ladungsdichte

$$\rho(\vec{r}) = -p\;\delta(x)\,\delta(y)\,\delta'(z)$$

definiert. Berechnen sie die Gesamtladung $Q = \int \rho(\vec{r})\,\mathrm{d}^3 r$ und das Diplomoment $\vec{p} = \int \vec{r}\,\rho(\vec{r})\,\mathrm{d}^3 r$. (Die Integrationen erstrecken sich dabei über den ganzen Raum.)

Aufgabe 48. *Potential einer kugelförmigen Ladungsverteilung (8 Punkte)*
Gegeben sei eine kugelsymmetrische Ladungsverteilung

$$\rho(\vec{r}) = \frac{q_0}{4\pi}\,\frac{a}{r^2(a+r)^2}$$

wobei r der radiale Abstand vom Koordinatenursprung bedeutet. Berechnen Sie das elektrostatische Potential $\phi(\vec{r})$ mit $\phi(\infty) = 0$ durch Lösen der Poissongleichung in Kugelkoordinaten. Verwenden Sie dabei, dass wegen der Symmetrie $\phi(\vec{r}) = \phi(r)$ gilt. Wie groß ist die Gesamtladung q der Ladungsverteilung?