Hinweis zur Übungsabgabe: Alle Aufgaben sind schriftlich zu bearbeiten. Die *handschriftlichen* Lösungen bitte als pdf Dokument in die vorgesehenen Ordner in OLAT hochladen.

Aufgabe 41. *Satz von Stokes (6 Punkte)*
Zeigen Sie unter Verwendung des Satzes von Stokes, dass der Flächeninhalt A einer beschränkten, einfach zusammenhängenden Fläche in der (x, y) Ebene, welche durch eine geschlossene Kurve $\mathcal{C}$ berandet ist, wie folgt berechnet werden kann:

$$A = \frac{1}{2} \oint_{\mathcal{C}} (-y, x, 0)^{\top} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \frac{1}{2} \oint_{\mathcal{C}} (x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x)\,.$$

Berechnen Sie damit den Flächeninhalt der *Kardioide* mit Polardarstellung $r = 2a(1 + \cos\phi)$, wobei $a > 0$ gelte.

Aufgabe 42. *Satz von Gauß 1 (6 Punkte)*
Gegeben sei ein Vektorfeld $\vec{B} = (x^2, y^2, z^2)$ sowie ein räumlich einfach zusammenhängender Bereich $V : \{\vec{r}\,|\, x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq z \leq 2\}$. Zeigen Sie explizit durch Berechnung der Oberflächen- und Volumenintegrale, dass der Satz von Gauß erfüllt ist, d.h. dass

$$\oint_{O(V)} \mathrm{d}\vec{A} \cdot \vec{B} = \int_V \mathrm{div}\vec{B}\; \mathrm{d}V.$$

Aufgabe 43. *Satz von Gauß 2 (6 Punkte)*
Gegeben sei das Feld $\vec{B}(\vec{r}) = (0, 0, az) = a\vec{z}$.

(a) Berechnen Sie den Fluss Φ des Feldes durch die Oberfläche einer Halbkugel

$$\vec{r}^{\,2} = x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \quad \text{mit} \quad z \geq 0$$

durch Berechnung des Oberflächenintegrals. Verifizieren Sie dann den Satz von Gauß.

(b) Welchen Wert hat das Kurvenintegral $\oint \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$ über eine beliebige geschlossene Kurve und warum?

Aufgabe 44. *Parabolische Koordinaten (6 Punkte)*
Parabolische Zylinderkoordinaten (u, v, z) sind ein weiteres Beispiel für lokal orthogonale Koordinaten. Sie sind definiert durch:

$$x = \frac{1}{2}(u^2 - v^2) \tag{1}$$
$$y = uv, \tag{2}$$
$$z = z, \tag{3}$$

wobei (x, y, z) kartesische Koordinaten bezeichnen.

Bitte wenden!

(a) Berechnen Sie

$$b_u = \left| \frac{\partial}{\partial u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right| \quad \text{und} \quad b_v = \left| \frac{\partial}{\partial v} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right|$$

und geben Sie das Längenlement $\mathrm{d}s^2 = (b_u)^2\,\mathrm{d}u^2 + (b_v)^2\,\mathrm{d}v^2 + (b_z)^2\,\mathrm{d}z^2$ und das Volumenelement $\mathrm{d}V = b_u b_v b_z\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}z$ in parabolischen Zylinderkoordinaten an.

(b) Bestimmen Sie die Einheitsvektoren $\vec{e}_u, \vec{e}_v, \vec{e}_z$ und veranschaulichen Sie sich die Koordinatenlinien.

(c) Geben Sie den Gradienten, die Divergenz und den Laplace-Operator $\Delta = \text{div grad}$ in parabolischen Zylinderkoordinaten an.