

XIII Delta Distribution

Um z.B. die Frage zu beantworten was die Ladungsdichte $\rho(\vec{r})$ einer auf einen Punkt konzentrierten Ladung (Punktladung) ist, ist es nützlich das mathematische Konzept der Delta Distribution (manchmal unpräzise Delta Funktion genannt) $\delta(x)$ zu verwenden

Eigenschaft:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \delta(x-x_0) = f(x_0)$$

für alle Funktionen $f(x)$ die für $|x-x_0| \rightarrow \infty$ hinreichend schnell gegen null gehen

$$\left[\text{"hinreichend schnell": } \lim_{|x| \rightarrow \infty} x^m \frac{d^k f(x)}{dx^k} = 0 \quad \forall m, k \right]$$

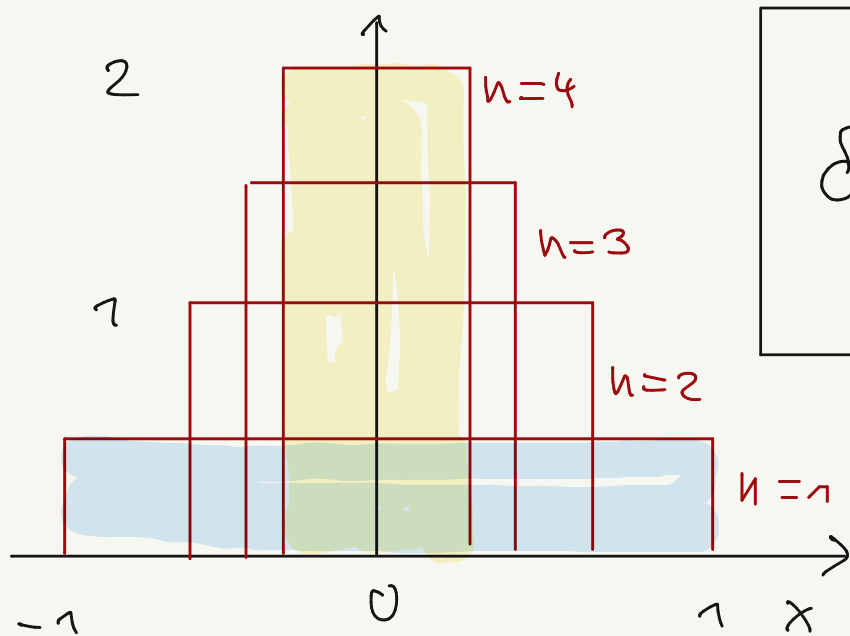
XIII.1 Elementare Definition

δ -Funktion kann als Grenzfunktion verschiedener Funktionenfolgen konstruiert werden

$$g_n(x) = \begin{cases} n/2 & |x| \leq 1/n \\ 0 & |x| > 1/n \end{cases} \quad n=1,2,\dots$$

man sieht

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx g_n(x) = 1$$



$$\delta(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = \begin{cases} \infty & x=0 \\ 0 & x \neq 0 \end{cases}$$

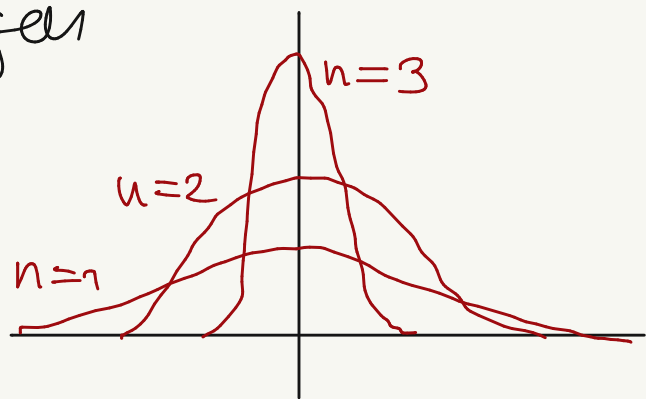
Mittelwertsatz der Integralrechnung

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \delta(x-x_0) = f(x_0) \int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x-x_0) = f(x_0)$$

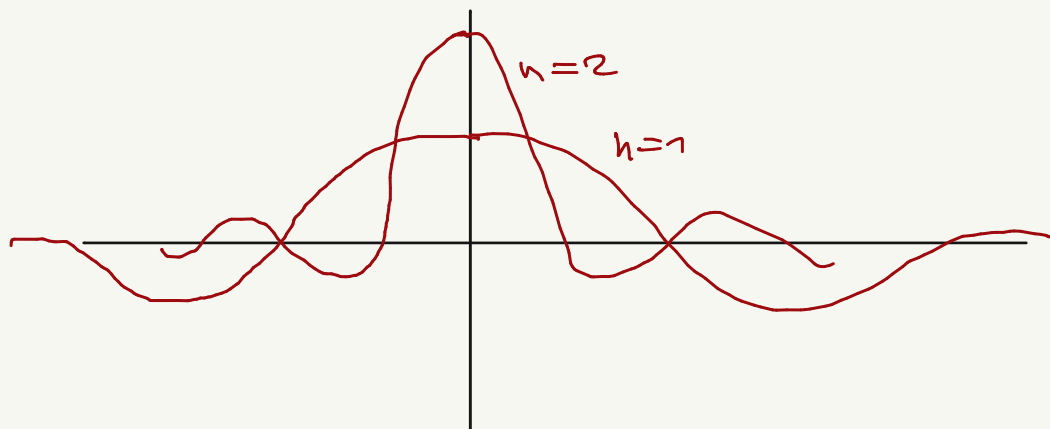


andere mögliche Funktionen folgen

$$g_n(x) = \sqrt{\frac{n}{\pi}} e^{-nx^2}$$



$$g_n(x) = \frac{\sin nx}{\pi x}$$



XIII.2 Eigenschaften

$$(i) \quad \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \delta(x-x_0) = f(x_0)$$

$$(ii) \quad \int_a^b dx f(x) \delta(x-x_0) = \begin{cases} f(x_0) & a < x_0 < b \\ \frac{1}{2} f(x_0) & a = x_0 \text{ oder } b = x_0 \\ 0 & x_0 \text{ außerhalb des Intervalls } (a, b) \end{cases}$$

$b > a$

$$(iii) \quad \delta(-x) = \delta(x)$$

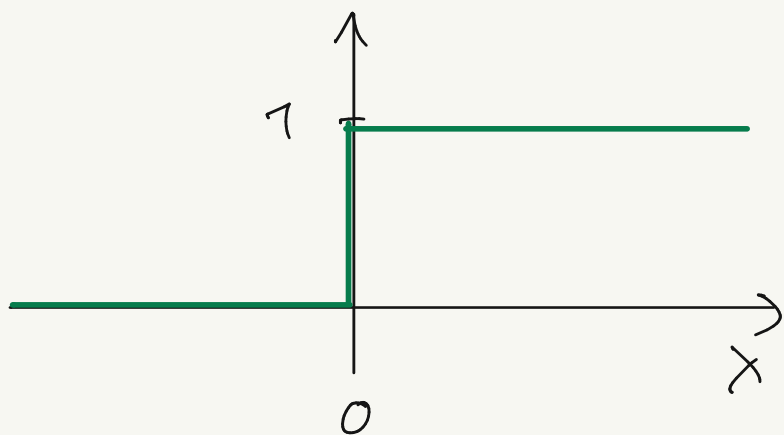
$$(iv) \quad \delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x) \quad a \neq 0$$

$$(v) \quad f(x) \text{ habe diskrete Nullstellen } x_\nu \\ \text{und } f'(x_\nu) \neq 0$$

$$\delta(f(x)) = \sum_\nu \frac{1}{|f'(x_\nu)|} \delta(x-x_\nu)$$

$$(vi) \quad \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \delta'(x-x_0) = -f'(x_0)$$

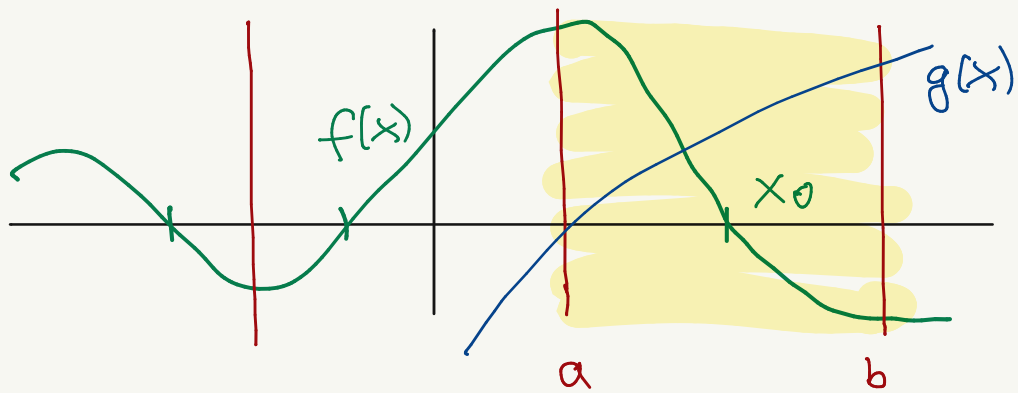
$$(vii) \quad \frac{d}{dx} \Theta(x) = \delta(x)$$



$$\Theta(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 1/2 & x = 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

Heaviside Sprungfunktion

Beweis (v): $f(x)$ habe Nullstelle x_0 zwischen (a, b)



$$a \rightarrow x_0 \leftarrow b$$

$$\text{Ist} \quad \int_a^b dx \, \delta(f(x)) g(x) \stackrel{?}{=} \frac{g(x_0)}{|f'(x_0)|}$$

Variablentransfer $y = f(x) \quad dy = f'(x) dx$

(a) $f'(x_0) > 0 \quad f(b) > f(a) \quad x(y) = f^{-1}(y)$
inverse Fkt.

$$\int_a^b dx \, \delta(f(x)) g(x) = \int_{f(a)}^{f(b)} dy \, \delta(y) \frac{1}{f'(x(y))} g(x(y))$$

$$= \frac{1}{f'(x_0)} g(x_0) \quad \text{da } y=0 \Leftrightarrow x=x_0$$

(b) $f'(x_0) < 0 \quad f(b) < f(a)$

$$\int_a^b dx \, \delta(f(x)) g(x) = - \int_{f(b)}^{f(a)} dy \, \delta(y) \frac{1}{f'(x(y))} g(x(y))$$

$$= - \frac{1}{f'(x_0)} g(x_0)$$

$$\Rightarrow \int_a^b dx \, \delta(f(x)) g(x) = \frac{1}{|f'(x_0)|} g(x_0)$$

Vergallgemeinerung
auf $-\infty \leq x \leq \infty$
und mehrere Null-
stellen einfach

□

XIII.3 Delta-Funktion in 3D

$$\int_{V_{\infty}} dV \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_0) f(\vec{r}) \equiv f(\vec{r}_0)$$

kartesische Koordinaten

$$\vec{r} \hat{=} (x_1, x_2, x_3) \quad dV = dx_1 dx_2 dx_3$$

$$\delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_0) = \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \delta(z - z_0)$$

krummlinige Koordinaten

$$\vec{r} \hat{=} (y_1, y_2, y_3) \quad dV = b_1 b_2 b_3 dy_1 dy_2 dy_3$$

$$\vec{r}_0 \hat{=} (y_{10}, y_{20}, y_{30}) \quad \text{wobei} \quad b_i = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial y_i} \right|$$

$$f(\vec{r}_0) = \int_{V_{\infty}} dV \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_0) f(\vec{r})$$

$$= \iiint dy_1 dy_2 dy_3 b_1 b_2 b_3 \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_0) f(\vec{r})$$

$$\stackrel{!}{=} \iiint dy_1 dy_2 dy_3 \delta(y_1 - y_{01}) \delta(y_2 - y_{02}) \delta(y_3 - y_{03}) f(\vec{r})$$

$$\Rightarrow \boxed{\delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_0) = \frac{1}{b_1 b_2 b_3} \delta(y_1 - y_{01}) \delta(y_2 - y_{02}) \delta(y_3 - y_{03})}$$