

XII Elektrodynamik - I

Mechanik: Bewegung von Massenpunkten und MP-Systemen
unter Wirkung vorgegebener Kräfte
→ Ursache der Kräfte?

fundamentale
Teilchen

Quarks
Leptonen

fundamentale
Kräfte = Felder

Photonen
W, Z Bosonen
Gluonen

einheitliche Quantenfeldtheorie der elektro-
schwachen und starken Wechselwirkung (WW)

starke WW
(Kernkräfte)

elektro-schwache WW
schwache
Wechselwirkung
(Radioaktivität)

QED
↓
klass. Limes
↓
klass. Elektrodynamik

Elektrodynamik: Theorie elektromagnetischer Kräfte die
durch elektrische Ladungen hervorgerufen
werden

XII.1 Allgemeines

(A) elektrisches und magnetisches Feld

- Cavendish, Coulomb $\Rightarrow$ Kraft auf ruhender Ladung q

$$\vec{F}(\vec{r}) = q \vec{E}(\vec{r})$$

elektrisches Feld

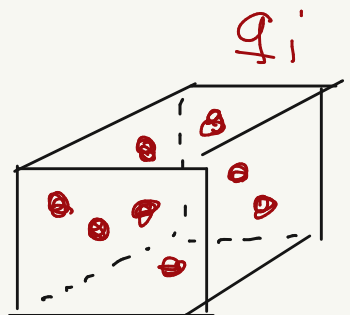
- Ampere, Lorentz $\Rightarrow$ Kraft auf bewegte Ladung und Ströme

$$\vec{F}(\vec{r}) = q (\vec{v} \times \vec{B}(\vec{r}))$$

magnetisches Feld

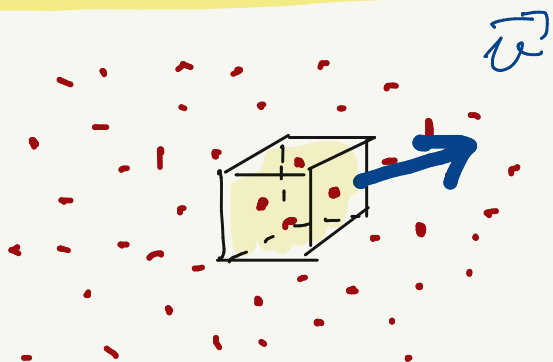
- Ladungsdichte,

$$\rho(\vec{r}) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta V} = \frac{dq}{dV}$$

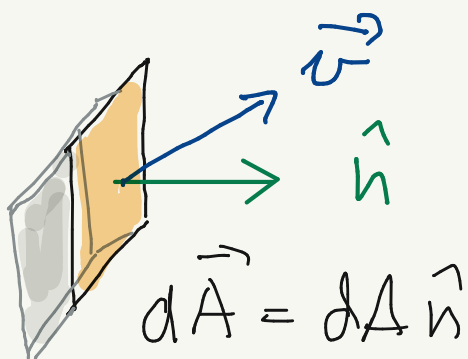


$$\Delta q = \sum_{i \in \Delta V} q_i$$

- Stromdichte



$$\vec{j}(\vec{r}) = \rho(\vec{r}) \cdot \vec{v}$$



$$I = \frac{dq}{dt}$$

$$dq = \int dA \rho \vec{v} \cdot \hat{n} dt$$

• Kraftdichte

$$\vec{f} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{F}}{\Delta V} = \frac{d\vec{F}}{dV} = \frac{dq}{dV} (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

$$\boxed{\vec{f} = \rho \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B}}$$

Lorentz
Kraftdichte

XII.2 Maxwellgleichungen

Die grundlegenden Gleichungen elektromagnetischer Felder sind erstmals von Maxwell zusammengestellt worden:

homogene MWG
inhomogene MWG

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{j} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \end{array} \right.$$

Gauß

Maxwell-Ampere

(keine magnet.
Ladungen)

Faraday

↑
Quellen des dm. Feldes

$$\epsilon_0 \approx 8.854 \cdot 10^{-12} \text{ As/Vm}$$

$$\epsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}$$

Linearität der Maxwellgleichungen

$\Rightarrow$

Superpositionsprinzip

falls F_1, F_2 Lösung $\Rightarrow F_1 + F_2$ Lösung

Konsistenzbedingung

MWGL sind 8 Gleichungen für 6 Unbekannte
($\vec{E}, \vec{B}$)

überbestimmt $\rightarrow$ Konsistenzbedingung

$$\vec{\nabla} \cdot \left[\vec{\nabla} \times \vec{B} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right] = \mu_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{j}$$

$\downarrow$

$$0 - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \mu_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{j}$$

$$-\cancel{\epsilon_0 \mu_0} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\rho}{\cancel{\epsilon_0}} = \cancel{\mu_0} \vec{\nabla} \cdot \vec{j}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Kontinuitätsgleichung
der Ladung

$$\vec{\nabla} \cdot \left[\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right] = 0$$

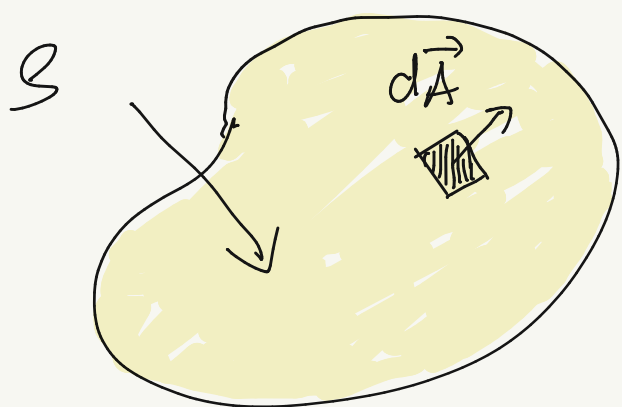
$\downarrow$
 0

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

✓

keine neue
Bedingung

Bedeutung der Kontinuitätsgleichung



$$\underbrace{- \int_V dV \operatorname{div} \vec{j}} = \underbrace{\int_V dV \frac{\partial \rho}{\partial t}}$$

$\checkmark$ Gesamtladung
 $= Q_V$

$$\underbrace{- \oint_{\partial(V)} d\vec{A} \cdot \vec{j}}_{\partial(V)} = \frac{dQ_V}{dt}$$

I_F : Gesamt Strom durch
Oberfläche

zeitliche Änderung
der Ladung

$$\boxed{\frac{dQ_V}{dt} + I_F = 0}$$

XII . 3 Lösung der homogenen MWGL: elm. Potentiale

(A) skalares und Vektorpotential

homogene Maxwellgleichungen (ohne weitere Randbedingungen) hängen nicht von Ladungen und Strömen ab $\rightarrow$ allg. Lösung möglich? Ja!

$$(i) \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}}$$

Vektorpotential

einsetzen in zweite homogene Maxwell

$$(ii) \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \times \vec{A} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{= -\vec{\nabla} \phi}$$

da Rotation eines
Gradienten verschwindet !

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

skalares Potential ϕ

$(\vec{E}, \vec{B})$ 2 Vektorfelder, 6 Komponenten
 $\downarrow$

$(\vec{A}, \phi)$ 1 Vektorfeld 4 Komponenten
1 skalares Feld

(B) Eichtransformationen

Elektrisches und magnetisches Feld sind meßbare physikalische Größen, die Potentiale sind zunächst aber nur mathematische Hilfsgrößen.

Potentiale eindeutig $\rightarrow$ Nein!

Mögliche Transformation des Vektorpotentials

$$(*) \quad \vec{A} \longrightarrow \boxed{\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} \lambda} \quad \lambda \text{ beliebige skalare Funktion}$$

läßt magnetisches Feld $\vec{B}$ unbeeinflusst

$$\vec{B}' = \vec{\nabla} \times \vec{A}' = \vec{\nabla} \times (\vec{A} + \vec{\nabla} \lambda) = \vec{\nabla} \times \vec{A} + \underbrace{\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \lambda}_{=0} = \vec{B}$$

Wie sieht es mit elektrischem Feld $\vec{E}$ aus?

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi - \frac{\partial}{\partial t} \vec{A} \rightarrow \vec{E}' = -\vec{\nabla} \phi - \frac{\partial}{\partial t} (\vec{A} + \vec{\nabla} \lambda) \neq \vec{E} \text{ i.A.}$$

Aber falls wir mit $\vec{A}$ auch ϕ transformieren

$$(**) \quad \phi \rightarrow \boxed{\phi' = \phi - \frac{\partial \lambda}{\partial t}}$$

gilt $\vec{B}' = \vec{B}$ und $\vec{E}' = \vec{E}$.

Eine solche Transformation (*) und (**) da Potentiale nennt man

Eichtransformationen

$$\begin{aligned} \vec{A} &\rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} \lambda \\ \phi &\rightarrow \phi' = \phi - \frac{\partial \lambda}{\partial t} \end{aligned}$$

Die Freiheit der Eichtransformationen kann man nutzen die Lösung elektrodynamischer Probleme zu vereinfachen. Im Rahmen der Elektrostatik die wir in dieser Vorlesung diskutieren beschränken sich Eichtransformationen aber auf triviale Transformationen und werden weniger Bedeutung haben. Die Freiheit der Eichtransformationen hat darüberhinaus eine wichtige fundamentale Bedeutung, die Sie aber erst in späteren Vorlesungen kennenlernen und verstehen werden.

XII. 4 Statik

Annahme: keine zeitlichen Änderungen

$$\rho(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r})$$

Ladungsdichte

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = \vec{j}(\vec{r})$$

Stromdichte

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{E} = \frac{\partial}{\partial t} \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

nur elektrisches
Feld $\vec{E}$ und Ladung ρ

Elektrostatik

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

nur magnetisches Feld $\vec{B}$
und Stromdichte $\vec{j}$

Magnetostatik