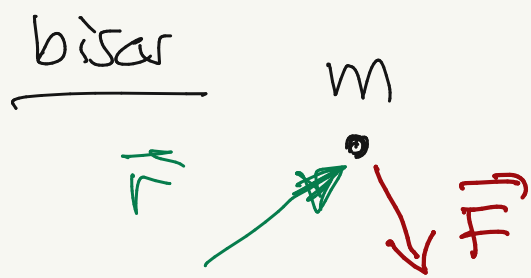
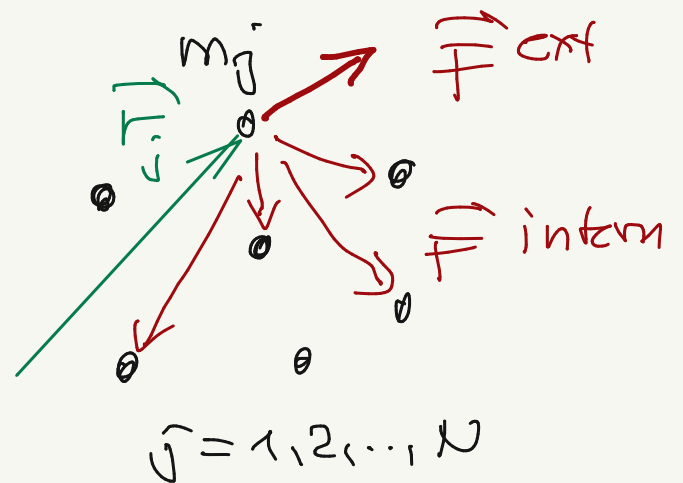


VII. Mechanik von Massenpunkt-systemen



jetzt



VII. 1 Wechselwirkungskräfte und äußere Kräfte

In der Mechanik von Massenpunktsystemen unterscheiden wir

innere Kräfte
(oder Wechselwirkungskräfte)

äußere Kräfte

m_j

$\vec{r}_j$

$\vec{F}_j^{(ext)}$

$\vec{F}_{je}$

$\vec{F}_{ji}$

$\vec{F}_{ji}$

Masse des j -ten Teilchens

Ort des j -ten Teilchens

externe Kraft am j -ten Teilchen

Kraft von Teilchen j auf Teilchen i

$$\begin{aligned}\vec{F}_j &= \vec{F}_j^{(ext)} + \sum_e \vec{F}_{je} \\ &= \vec{F}_j(\underbrace{\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N; \vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_N; t})\end{aligned}$$

Kraft hängt i.A. von Koordinaten und Impulsen aller Teilchen ab!

Das ist es was Vielteilchensysteme kompliziert macht!

3. Newton'sches Axiom

$$\boxed{\vec{F}_{je} = -\vec{F}_{ej}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{F}_{jj} = 0}$$

keine Selbstwechselwirkung

Bewegungsgleichungen

$$m_j \ddot{\vec{r}}_j = \vec{F}_j = \vec{F}_j^{(ex)} + \sum_{e \neq j} \vec{F}_{je}$$

Wichtige Begriffe

Gesamtmasse

$$M = \sum_{j=1}^N m_j$$

Schwerpunkt

$$\vec{R} = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^N \vec{r}_j$$

Gesamtimpuls

$$\vec{P} = \sum_{j=1}^N m_j \dot{\vec{r}}_j = M \dot{\vec{R}}$$

VII.2 Erhaltungssätze

(A) Schwerpunktsatz

Aufgrund des 3. Newtonschen Axioms verschwindet die Gesamtkraft aller inneren Kräfte, d.h.

$$\sum_{j,e} \vec{F}_{je} = \frac{1}{2} \sum_{j,e} (\vec{F}_{je} + \vec{F}_{ej}) = 0$$

$$\Rightarrow \sum_j m_j \ddot{\vec{r}}_j = \sum_j \vec{F}_j^{(ex)} + \sum_{j,e} \vec{F}_{ej} = \sum_j \vec{F}_j^{(ex)}$$

bei

- zeitlich unveränderlichen Massen $m_j = \text{konst.}$
- zeitlich konstanter Zahl von Massenpunkten

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d}{dt} M \vec{R} = \frac{d}{dt} \vec{P} = \sum_j \vec{F}_j^{(ext)} = \vec{F}^{(ext)}}$$

Die zeitliche Änderung des Gesamtimpulses ist gleich der Summe der äußeren Kräfte

falls

$$\sum_j \vec{F}_j^{(ext)} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{P} = \text{konst.}$$

Schwerpunkterhaltung

(B) Drehimpulssatz

Gesamtdrehimpuls
(bezgl. Koordinaten-
ursprung)

$$\vec{L} = \sum_j \vec{L}_j = \sum_j m_j (\vec{r}_j \times \dot{\vec{r}}_j)$$

$$\frac{d}{dt} \vec{L} = \sum_j m_j \underbrace{(\dot{\vec{r}}_j \times \dot{\vec{r}}_j)}_{=0} + \sum_j m_j (\vec{r}_j \times \ddot{\vec{r}}_j)$$

$$= \sum_j \vec{r}_j \times \vec{F}_j$$

$$= \sum_j \vec{r}_j \times \vec{F}_j^{(ext)} + \sum_{je} \vec{r}_j \times \vec{F}_{je}$$

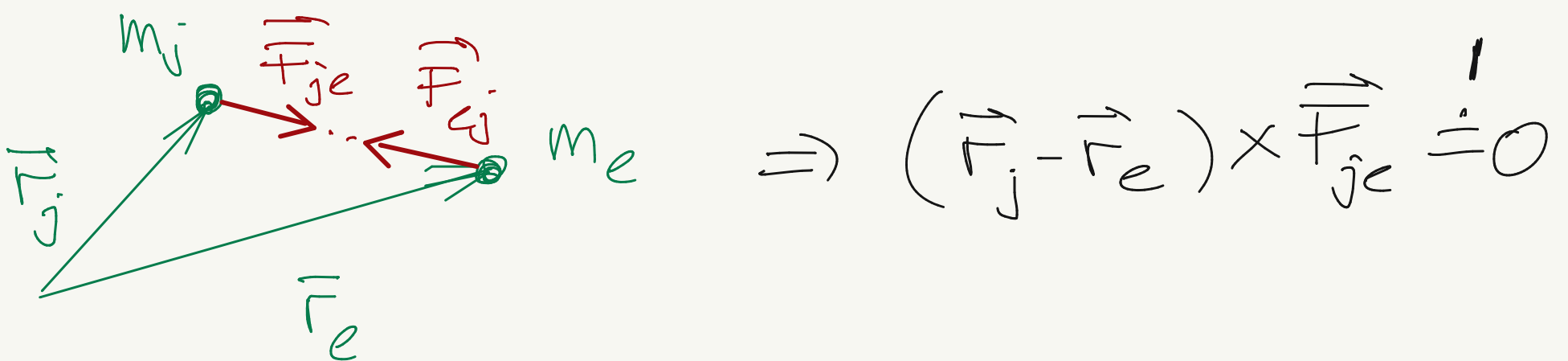
$$= \sum_j \vec{r}_j \times \vec{F}_j^{(ext)} + \frac{1}{2} \sum_{je} \left(\vec{r}_j \times \vec{F}_{je} + \vec{r}_e \times \vec{F}_{ej} \right)$$

$\underbrace{\vec{r}_e \times \vec{F}_{ej}}_{= -\vec{r}_e \times \vec{F}_{je}}$

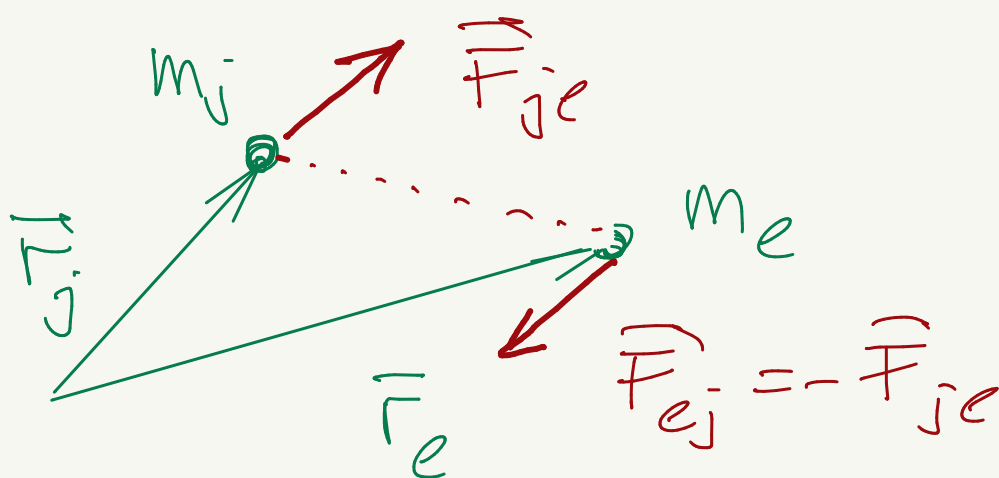
$\Rightarrow$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_j \vec{r}_j \times \vec{F}_j^{(ext)} + \frac{1}{2} \sum_{je} (\vec{r}_j - \vec{r}_e) \times \vec{F}_{je}$$

Annahme: WW-Kräfte $\vec{F}_{je} \parallel (\vec{r}_j - \vec{r}_e)$



Bem: Im Prinzip auch möglich, daß



Für $\vec{F}_{je} \parallel (\vec{r}_j - \vec{r}_e)$ gilt

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_j \vec{M}_j^{(ext)} = \vec{M}$$

Die zeitliche Änderung des Gesamtdrehimpulses ist gleich der Summe der externen Drehmomente

falls $\sum_j \vec{r}_j \times \vec{F}_j^{(ext)} = 0 \Rightarrow \vec{L} = \text{const}$

Erhaltung des Gesamtdrehimpulses

(c) Energiesatz

$$\sum_j \dot{\vec{r}}_j \cdot \left| m_j \ddot{\vec{r}}_j = \vec{F}_j \right.$$

$$\sum_j m_j (\dot{\vec{r}}_j \cdot \ddot{\vec{r}}_j) = \sum_j \dot{\vec{r}}_j \cdot \vec{F}_j$$

$$\frac{d}{dt} \left(\underbrace{\frac{1}{2} \sum_j m_j \dot{\vec{r}}_j^2}_{\text{kinetische Gesamtenergie } T} \right) = \sum_j \dot{\vec{r}}_j \cdot \vec{F}_j$$

kinetische Gesamtenergie T

Def: konserervative Kraft

$$\vec{F}_j = \vec{F}_j(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N) = -\vec{\nabla}_j V(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N)$$

$$\sum_j \dot{\vec{r}}_j \cdot \vec{F}_j = -\sum_j \dot{\vec{r}}_j \cdot \vec{\nabla}_j V = -\frac{dV}{dt}$$

allg.: $\vec{F}_j = \vec{F}_j^{(kons.)} + \vec{F}_j^{(diss.)}$

Leistung
dissipativer
Kräfte
↙

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} (T + V) = \sum_j \dot{\vec{r}}_j \cdot \vec{F}_j^{(diss.)}$$

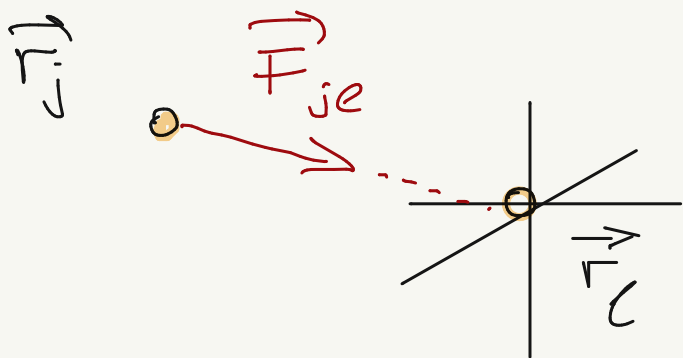
Erhaltung der Gesamtenergie

- Wechselwirkungskräfte sind in allen bekannten Fällen konservativ

oft gilt

$$\vec{F}_{je} = -\vec{F}_{ej} = \vec{F}_{je} (|\vec{r}_j - \vec{r}_e|)$$

das ist eine Zentralkraft bzgl. $\vec{r}_e \Rightarrow$ konservativ!



- falls externe Kräfte ebenfalls konservativ

$$\vec{F}_j^{(ext)} = -\vec{\nabla}_j V_j^{(ext)}$$

$$V(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N) = \sum_j V_j^{(ext)}(\vec{r}_j) + \frac{1}{2} \sum_{ij} V_{ij}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|)$$

allg. N-Teilchen Potential
für Paarwechselwirkungen

Bem: $\frac{1}{2}$ wegen Doppelsumme

(D) Virialsatz

$$\sum_j \vec{r}_j \cdot \left| \begin{array}{l} m_j \vec{r}_j^{\ddot{}} = \vec{F}_j \\ \sum_j m_j \vec{r}_j \cdot \vec{r}_j^{\ddot{}} = \sum_j \vec{r}_j \cdot \vec{F}_j \end{array} \right.$$

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_j m_j \vec{r}_j \cdot \dot{\vec{r}}_j \right) - \sum_j m_j \dot{\vec{r}}_j^2 = \sum_j \vec{r}_j \cdot \vec{F}_j$$

Annahme: $\vec{F}_j$ konservativ

$$\Rightarrow \sum_j \vec{r}_j \cdot \vec{F}_j = - \sum_j \vec{r}_j \cdot \vec{\nabla}_j V$$

Annahme: Beschränkte Bewegung, d.h. alle $|\vec{r}_j|$ und $|\dot{\vec{r}}_j|$ beschränkt

$\Rightarrow$ nach zeitlicher Mittelung

$$2 \overline{T}^t = \overline{\sum_j m_j \dot{\vec{r}}_j^2}^t = \overline{\sum_j \vec{r}_j \cdot \vec{\nabla}_j V}^t$$

Virialsatz

VII. 3 Elementare Anwendungen

(A) Raketengleichung: Impulserhaltung

Auftrieb einer Rakete: kontinuierlicher Ausstoß von Masse mit Relativgeschwindigkeit $\vec{u}$ zur Rakete



betrachten ausgestoßenes Gas als Menge von Massenpunkten (Gas molecule) mit Masse m_0

Kraft auf j 'tes Teilchen

$$\vec{F}_j = \sum_{i \neq j} \vec{F}_{ji} + \vec{F}_j^{(ext)}$$

Anschauung: keine externe Kraft

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \vec{P} = \frac{d}{dt} \left(\sum_{j \in \text{Rakete}} \vec{p}_j + \sum_{j \in \text{Gas}} \vec{p}_j \right) = 0$$

alle Teilchen in Rakete alle Teilchen des ausgestoßenen Gases

$$\vec{P}_R$$

$$\vec{P}_G$$

Ausstoß eines Teilchens im Zeitintervall Δt

$$\Delta \vec{P}_R = \vec{P}_R(t + \Delta t) - \vec{P}_R(t)$$

$$= m_0 N(t) \vec{u}_R(t + \Delta t) - m_0 (N(t) + 1) \vec{u}_R(t)$$

$$\stackrel{!}{=} -\Delta \vec{P}_G = -m_0 (\vec{u} + \vec{u}_R(t))$$

mit $\vec{v}_R(t+\Delta t) = \vec{v}_R(t) + \Delta \vec{v}_R(t) \Rightarrow$

$$-m_0 \vec{v}_R(t) + m_0 N(t) \Delta \vec{v}_R(t) = -m_0 (\vec{u} + \vec{v}_R(t))$$

d.h.

$$\Delta \vec{v}_R(t) = - \frac{1}{N(t)} \vec{u} = - \frac{\Delta m}{m} \vec{u}$$

für $\Delta t \rightarrow 0$

$$m(t) = N(t) m_0$$

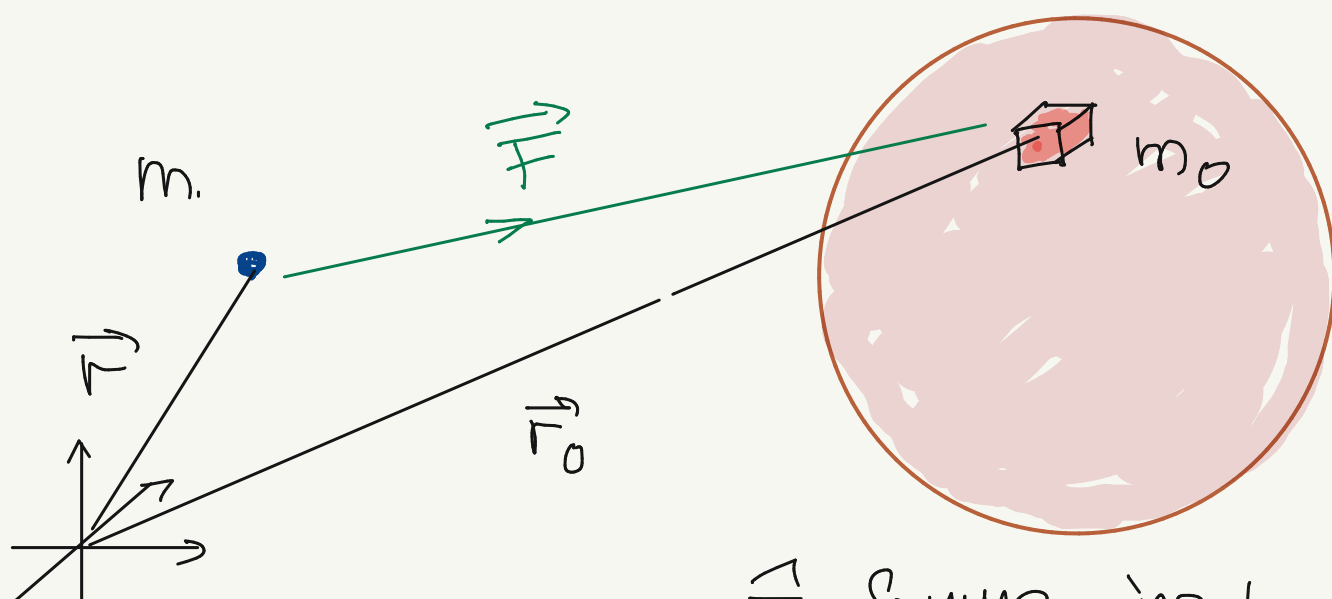
$$\Delta m = m_0$$

$$d\vec{v} = - \frac{dm}{m} \vec{u}$$

Raketengleichung

(B) Gravitationskraft ausgedehnter Körper

Frage: Was ist die resultierende Gesamtgravitationskraft eines ausgedehnten Körpers?



$\hat{=}$ Summe einzelner Massenpunkte

ein Massenpunkt

$$\vec{F} = - \gamma m \frac{m_0 (\vec{r} - \vec{r}_0)}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3}$$

Gesamtkraft

$$\vec{F} = -\gamma m \sum_{j=1}^N \frac{m_j}{|\vec{r} - \vec{r}_j|^3} (\vec{r} - \vec{r}_j)$$

Übergang zum Kontinuum

$$\sum_j m_j \longrightarrow \int d^3\vec{r}' \rho(\vec{r}')$$

Kraft

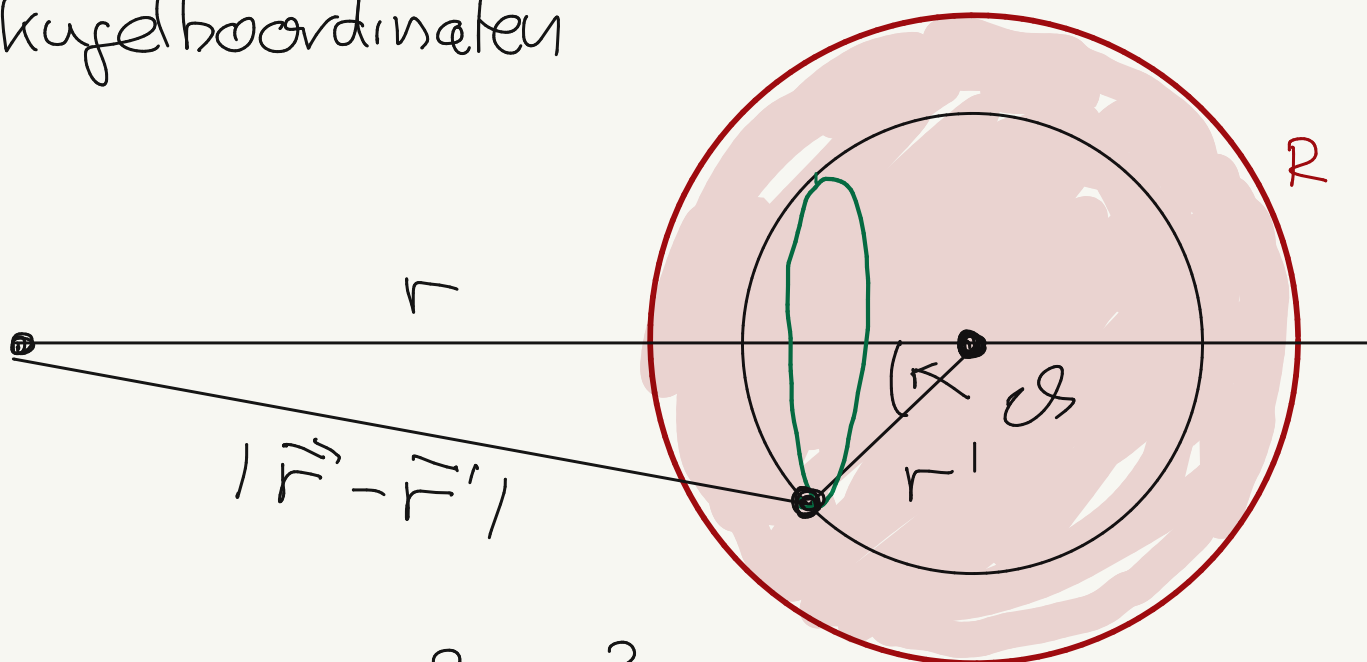
$$\vec{F}(\vec{r}) = -\gamma m \int d^3\vec{r}' \frac{\rho(\vec{r}') (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

Potential

$$V(\vec{r}) = -\gamma m \int d^3\vec{r}' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Beispiel: Kugelsymmetrische Massenverteilung
konstanter Dichte ρ mit Radius R_0

$\Rightarrow$ Kugelkoordinaten



$$|\vec{r} - \vec{r}'|^2 = r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\vartheta$$

$$V(\vec{r}) = -\gamma m \underbrace{\int_0^R dr' \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^\pi d\vartheta' \sin\vartheta'}_{\text{Volumenintegral in Kugelkoordinaten (später)}} \frac{\rho r'^2}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos\vartheta'}}$$

Volumenintegral in
Kugelkoordinaten
(später)

φ -Integration
kann sofort
ausgeführt werden

$$= -2\pi \gamma m \rho \int_0^R dr' \int_0^\pi d\vartheta' \sin\vartheta' \frac{r'^2}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos\vartheta'}}$$

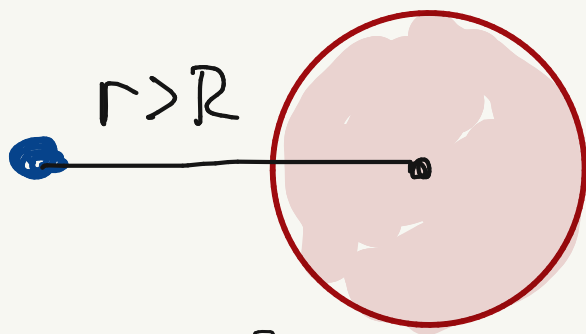
Substitution $\xi = \cos\vartheta'$ $d\xi = -\sin\vartheta' d\vartheta'$

$$V(\vec{r}) = -2\pi \gamma m \rho \int_0^R dr' \underbrace{\int_{-1}^1 d\xi \frac{r'^2}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\xi}}}_{\text{ }}$$

$$= \begin{cases} \frac{2r'^2}{r} & \text{für } r > r' \\ 2r' & \text{für } r < r' \end{cases}$$

$$V(\vec{r}) = -4\pi \gamma m \rho \begin{cases} \int_0^R dr' \frac{r'^2}{r} & r > r' \\ \int_0^R dr' r' & r < r' \end{cases}$$

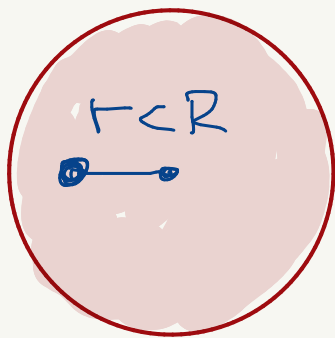
$$\underline{r \geq R}$$



$$V(\vec{r}) = -\gamma m \frac{\frac{4\pi}{3} R^3 \rho}{r} = -\gamma m \frac{M}{r}$$

$\Rightarrow$ wie Punktmasse $M = \frac{4\pi}{3} R^3 \rho$ am Ursprung

$$\underline{r < R}$$

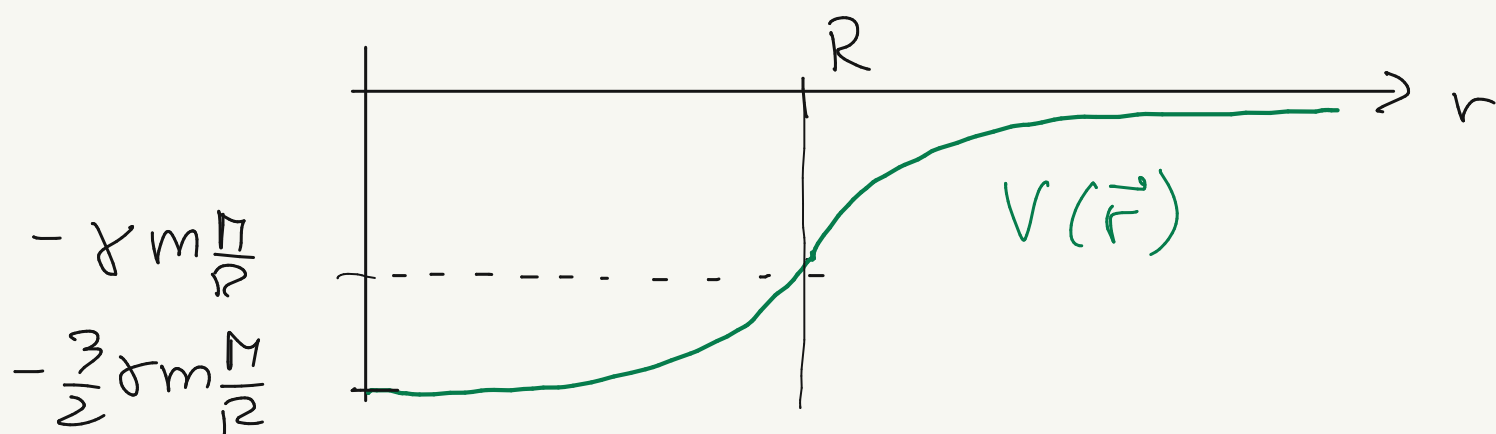


$$V(\vec{r}) = -4\pi\gamma m \rho \left[\int_0^r dr' \frac{r'^2}{r} + \int_r^R dr' r' \right]$$

$$= -4\pi\gamma m \rho \left[\frac{1}{3} r^2 + \frac{1}{2} (R^2 - r^2) \right]$$

$$= -\frac{4\pi}{3} \gamma m \rho \left[\frac{3}{2} R^2 - \frac{r^2}{2} \right]$$

$$V(\vec{r}) = -\gamma \frac{m M}{R} \left(\frac{3}{2} - \frac{r^2}{2R^2} \right)$$



VII.4 Das Zweikörperproblem

(A) Reduktion auf Einkörperproblem

Schwerpunkt $\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1}{M} \vec{r}_1 + \frac{m_2}{M} \vec{r}_2$

Relativkoordin. $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$

oder

$$\vec{r}_1 = \vec{R} + \frac{m_2}{M} \vec{r}$$

$$\vec{r}_2 = \vec{R} - \frac{m_1}{M} \vec{r}$$

Bewegungsgleichungen

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = \vec{F}_1^{(ext)} + \vec{F}_{12}$$

$$m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = \vec{F}_2^{(ext)} + \vec{F}_{21}$$

$$M \ddot{\vec{R}} = \vec{F}^{(ext)}$$

wie bereits gesehen

$$\ddot{\vec{r}} = \frac{\vec{F}_1^{(ext)}}{m_1} - \frac{\vec{F}_2^{(ext)}}{m_2} + \frac{\vec{F}_{12}}{m_1} - \frac{\vec{F}_{21}}{m_2}$$

$$\text{mit } \vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

$$\ddot{\vec{r}} = \frac{\vec{F}_1^{(ext)}}{m_1} - \frac{\vec{F}_2^{(ext)}}{m_2} + \vec{F}_{12} \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right)$$

Def: reduzierte Masse μ

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$$

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

Annahme: abgeschlossenes System; keine äußeren Kräfte
 $\vec{F}_{\text{ext}} = 0$

$$M \vec{\ddot{R}} = 0$$

$$\vec{P} = \text{konst}$$

$$\mu \vec{\ddot{r}} = \vec{F}_{12}(|\vec{r}|)$$

effektives Einkörperproblem

(B) Erhaltungsgrößen

Es ist nützlich die Erhaltungsgrößen durch Schwerpunkt- und Relativkoordinaten auszudrücken und wenn das System nicht abgeschlossen ist, d.h. externe Kräfte wirken

● kinetische Energie

$$T = \frac{m_1}{2} \dot{\vec{r}}_1^2 + \frac{m_2}{2} \dot{\vec{r}}_2^2 = \frac{M}{2} \dot{\vec{R}}^2 + \frac{\mu}{2} \dot{\vec{r}}^2 = T_{\text{sp}} + T_r$$

kinet. E. des SP

kinet. E. der Relativbewegung

$$T_{sp} = \frac{M}{2} \dot{\vec{R}}^2$$

$$T_r = \frac{\mu}{2} \dot{\vec{r}}^2$$

• Gesamtenergie

$$E = E_{sp} + E_r$$

$$E_{sp} = T_{sp} + V_1 + V_2$$

$$E_r = T_r + V_{12}$$

• Drehimpuls

$$\vec{L} = \sum_{j=1}^2 m_j (\vec{r}_j \times \dot{\vec{r}}_j)$$

$$= m_1 \left[\left(\vec{R} + \frac{m_2}{M} \vec{r} \right) \times \left(\dot{\vec{R}} + \frac{m_2}{M} \dot{\vec{r}} \right) \right] + m_2 \left[\left(\vec{R} - \frac{m_1}{M} \vec{r} \right) \times \left(\dot{\vec{R}} - \frac{m_1}{M} \dot{\vec{r}} \right) \right]$$

$$= (m_1 + m_2) (\vec{R} \times \dot{\vec{R}}) + \frac{m_1 m_2}{M} \frac{(m_1 + m_2)}{M} (\vec{r} \times \dot{\vec{r}})$$

$$= \vec{R} \times \vec{P} + \mu (\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) = \vec{L}_{sp} + \vec{L}_r$$

$$\vec{L}_{sp} = \vec{R} \times \vec{P}$$

$$\vec{L}_r = \mu (\vec{r} \times \dot{\vec{r}})$$

Drehimpuls des SP

Relativ drehimpuls

abgeschlossenes System $\vec{F}_j^{(ext)} \equiv 0$

- Erhaltung von Relativ.- und SP-Energie

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} E_r &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\mu}{2} \dot{\vec{r}}^2 \right) + \frac{d}{dt} V_{12}(|\vec{r}|) \\ &= \mu \dot{\vec{r}} \ddot{\vec{r}} + \dot{\vec{r}} \cdot \vec{\nabla} V_{12}(|\vec{r}|) \\ &= \dot{\vec{r}} \left(\mu \ddot{\vec{r}} + \vec{\nabla} V_{12}(|\vec{r}|) \right) = 0\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d E_r}{dt} = 0}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d E_{sp}}{dt} = 0}$$

- Erhaltung von Relativ- und SP Drehimpuls

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \vec{L}_r &= \frac{d}{dt} \mu (\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) = \mu (\underbrace{\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}}}_{=0}) + \mu \vec{r} \times \ddot{\vec{r}} \\ &= \vec{r} \times \vec{F}_{12}(|\vec{r}|) \stackrel{\uparrow}{=} 0 \quad \text{da } \vec{F}_{12} \parallel \vec{r}\end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{d \vec{L}_r}{dt} = 0}$$

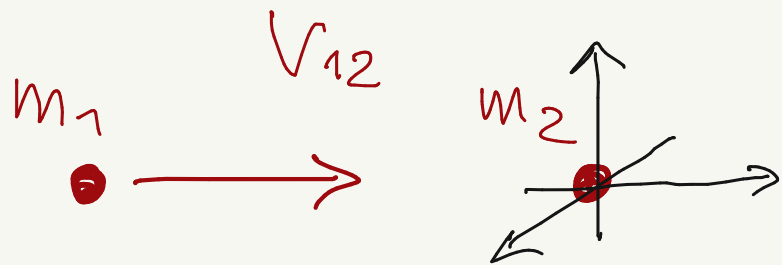
$$\boxed{\frac{d \vec{L}_{sp}}{dt} = 0}$$

- zusätzlich hatten wir ja die SP Erhaltung
($\vec{F}_j^{(ext)} = 0$)

$$\boxed{\frac{d \vec{p}}{dt} = 0}$$

VII. 5 Der elastische Stoß

Eine wichtige Anwendung des Zweikörperproblems ist der elastische Stoß zweier Massenpunkte

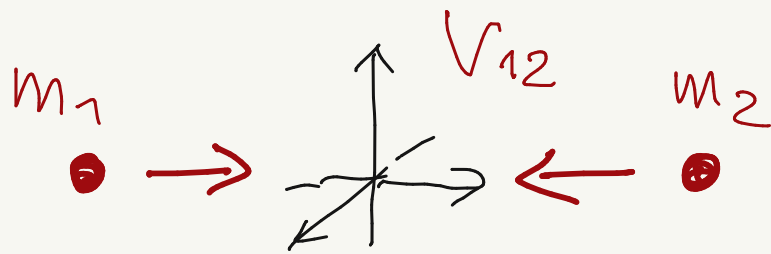


Laborsystem

$$\sum \vec{L}$$

$$\vec{r}_2(t = -\infty) = 0$$

$$\dot{\vec{r}}_2(t = -\infty) = 0$$



Schwerpunktsystem

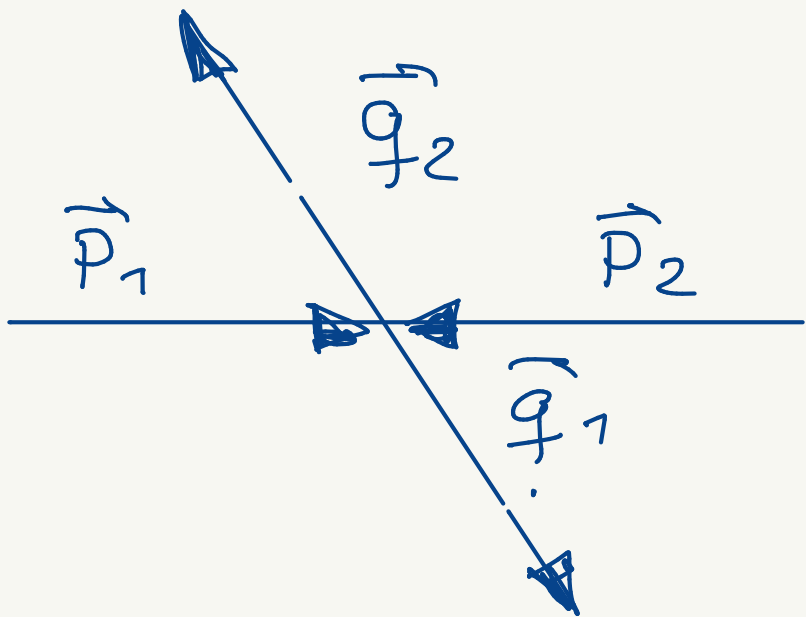
$$\sum \vec{L}_S$$

$$\vec{P} = 0$$

(A) Schwerpunktsystem

Impulserhaltung $\vec{P} = 0$

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{q}_1 + \vec{q}_2 = 0$$



$$\vec{p}_1 = -\vec{p}_2$$

$$\vec{q}_1 = -\vec{q}_2$$

(*)

- Energieerhaltung: WW Potential mit endlicher Reichweite

für $t \rightarrow +\infty$ und $t \rightarrow -\infty$
 nur kinetische Energie!

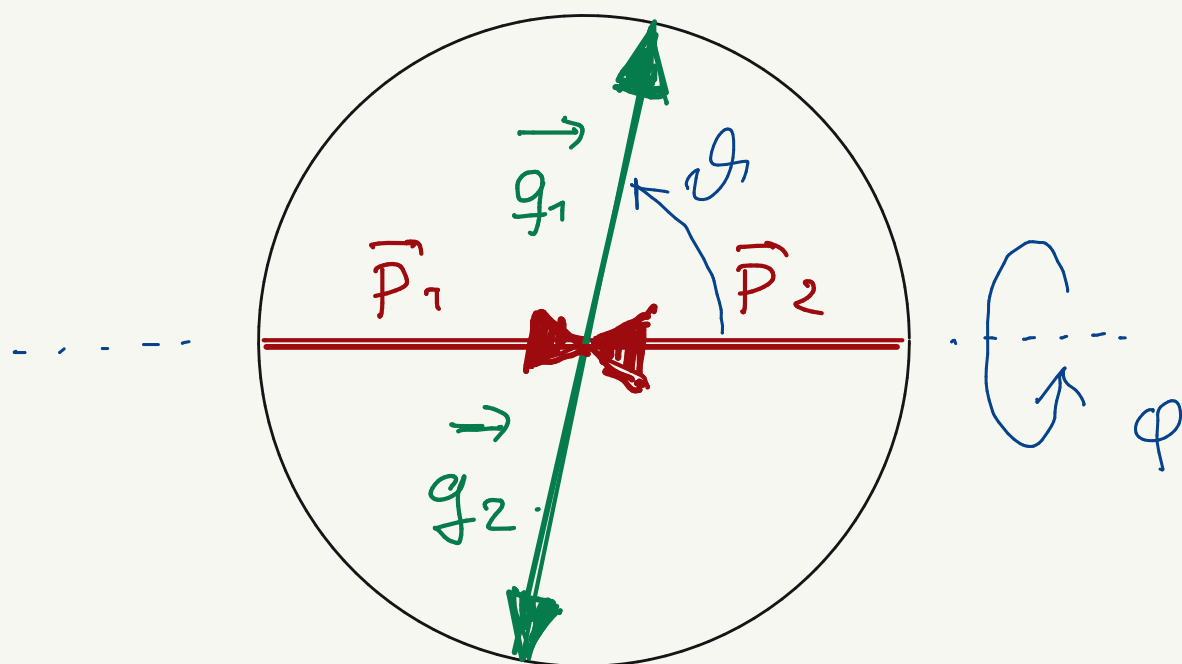
$$\frac{\vec{p}_1^2}{2m_1} + \frac{\vec{p}_2^2}{2m_2} = \frac{\vec{q}_1^2}{2m_1} + \frac{\vec{q}_2^2}{2m_2}$$

mit Impulserhaltung (*)

$$\frac{\vec{p}_1^2}{2} \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) = \frac{\vec{q}_1^2}{2} \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right)$$

$$\boxed{\frac{1}{2\mu} \vec{p}_1^2 = \frac{1}{2\mu} \vec{q}_1^2}$$

dasselbe
 für
 $\vec{q}_2, \vec{p}_2$



kann noch
 beliebig um
 Einfallssache
 rotiert werden

θ, φ nicht allein durch Erhaltungssätze
 bestimmt $\rightarrow$ konkreter Anfangswertproblem



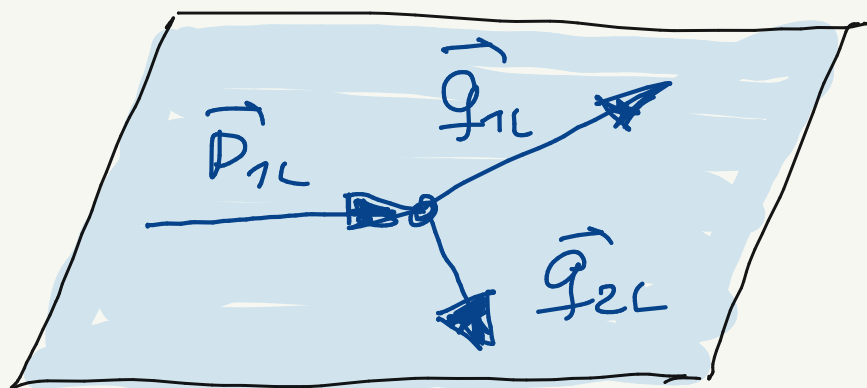
(B) Laborsystem

$$\vec{r}_{2L} = \dot{\vec{r}}_{2L} = 0 \quad t \rightarrow -\infty$$

(ruhendes Target)

$$(\vec{p}_{1L} = \vec{p}, \vec{p}_{2L} = 0) \longrightarrow (\vec{q}_{1L}, \vec{q}_{2L})$$

$\vec{p}_{1L}, \vec{q}_{1L}, \vec{q}_{2L}$ bilden eine Ebene $\vec{p} = \text{konst}$



Zshg. zwischen Labor- und Schwerpunktsystem
vor und nach dem Stoß

$$\vec{r}_{iL} = \vec{r}_i + \vec{R}_L \quad (\vec{R}_S = 0, \dot{\vec{R}}_S = 0)$$

$t \rightarrow -\infty$

$$\vec{p}_1 = m_1 \dot{\vec{r}}_1 = m_1 \dot{\vec{r}}_{1L} - m_1 \dot{\vec{R}}_L = \vec{p}_{1L} - m_1 \dot{\vec{R}}_L$$

$$\text{mit} \quad \dot{\vec{R}}_L = \frac{m_1 \dot{\vec{r}}_{1L} + \cancel{m_2 \dot{\vec{r}}_{2L} = 0}}{m_1 + m_2} = \frac{1}{M} \vec{p}_{1L}$$

$$\vec{p}_1 = \vec{p}_{1L} - \frac{m_1}{M} \vec{p}_{1L} = \frac{m_2}{M} \vec{p}_{1L}$$

$$\vec{p}_2 = \underbrace{\vec{p}_{2L}}_0 - \frac{m_2}{M} \vec{p}_{1L} = -\frac{m_2}{M} \vec{p}_{1L}$$

$$t \rightarrow +\infty$$

$$\dot{\vec{R}}_L = \text{konst}$$

$$\vec{q}_1 = \vec{q}_{1L} - m_1 \dot{\vec{R}}_L = \vec{q}_{1L} - \frac{m_1}{M} \vec{p}_{1L}$$

$$\vec{q}_{1L} = \vec{q}_1 + \frac{m_1}{M} \vec{p}_{1L}$$

Impuls von Teilchen
1 nach dem Stoß

Impulserhaltung

$$\vec{q}_{1L} + \vec{q}_{2L} = \vec{p}_{1L}$$

$$\vec{q}_{2L} = \vec{p}_{1L} - \vec{q}_{1L} = -\vec{q}_1 + \left(1 - \frac{m_1}{M}\right) \vec{p}_{1L}$$

$$\vec{q}_{2L} = -\vec{q}_1 + \frac{m_2}{M} \vec{p}_{1L}$$

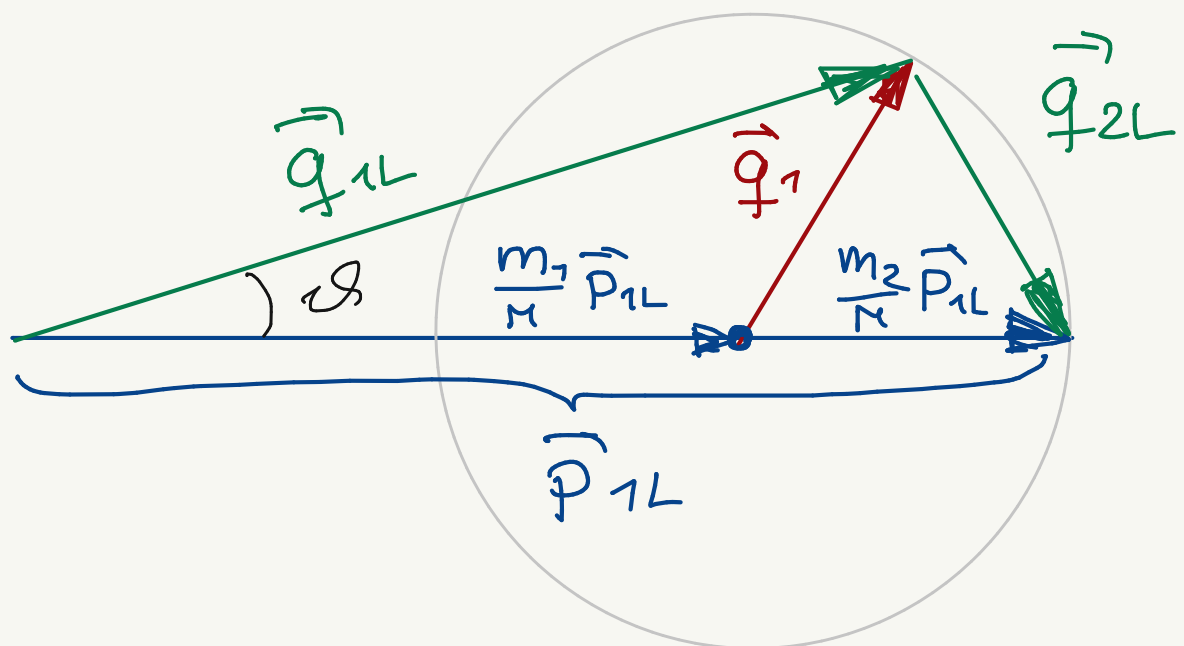
Impuls von Teilchen
2 nach dem Stoß

$\vec{q}_1$ nicht bekannt, nur Betrag ist festgelegt

$$|\vec{q}_1| = |\vec{p}_1| = \frac{m_2}{M} |\vec{p}_{1L}|$$

Vektorielle Konstruktion

Stoßkugel

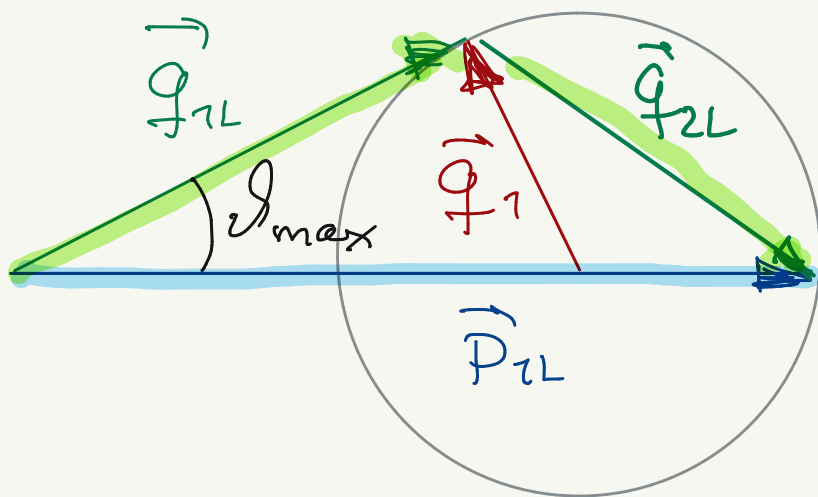


$$m_1 > m_2$$

Masse der stoßenden Kugel
> Masse der ruhenden Kugel

$\exists$ maximaler Stoßwinkel $\vartheta_{\max}$

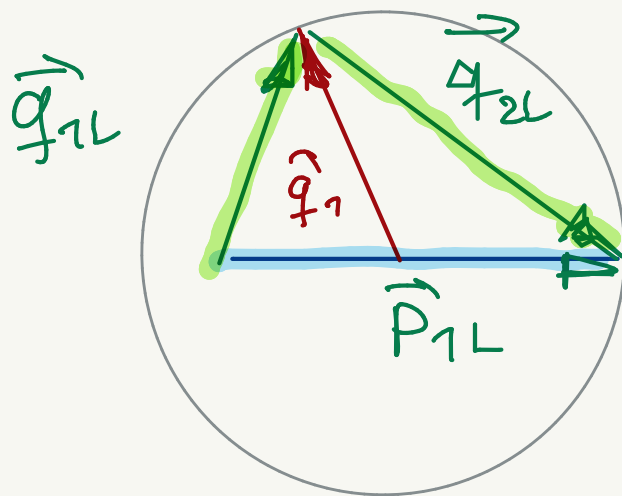
$$\begin{aligned} \sin \vartheta_{\max} &= \frac{|\vec{q}_1|}{\frac{m_1}{m} \vec{p}_{1L}} \\ &= \frac{m_2}{m_1} \end{aligned}$$



$$m_1 < m_2$$

Masse der stoßenden Kugel
< Masse der ruhenden Kugel

jeder Stoßwinkel möglich



VII. 6 Planetenbewegung

Bisher hatten wir bei Betrachtung der Planetenbewegung die Bewegung des "Zentralgestirns" vernachlässigt. Tatsächlich handelt es sich aber um ein Zweikörperproblem

$$V(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r_{12}} \quad r_{12} = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$$

keine äußere Kraft $\Rightarrow$ Schwerpunkt erhalten
 $\rightarrow$ ins SP System

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

$$\mu \ddot{\vec{r}} = \vec{F}_{12} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^3} \vec{r}$$

$\hat{=}$ Keplerproblem für Relativkoordinate $\vec{r}$
 und reduzierte Masse μ

Lösung: Keplerbahnen

$$r = \frac{K}{1 + \varepsilon \cos \varphi}$$

SP System $\vec{R} = 0$

$$\vec{r}_1 = \frac{m_2}{M} \vec{r}$$

$$\vec{r}_2 = -\frac{m_1}{M} \vec{r}$$

