

(B) Flächen- und Volumenintegrale skalare Fkt.

(C) Oberflächenintegrale vektorieller Funktionen

das machen wir später
in Vektoranalysis II

→ jetzt erst mal zur Physik

III. Mechanik des Massenpunktes I

III.1. Newtonsche Axiome

lex prima (1. Newtonsche Axiome)

Es gibt Koordinatensysteme in denen ein kräftefreier Körper (Massenpunkt) im Zustand der Ruhe oder der geradlinig, gleichförmigen Bewegung verharnt. Solche Systeme heißen Inertialsysteme

- Wenn Σ ein Inertialsystem ist, so ist jedes System Σ' welches sich relativ zu Σ mit konstanter Geschwindigkeit $\vec{u}$ bewegt ebenfalls ein Inertialsystem

Bew: $\sum_i \vec{r}_i = 0$

$\Sigma \rightarrow \Sigma'$ $\vec{r}' = \vec{r} + \vec{u}(t - t_0) + \vec{r}_0$ $\vec{r}' = 0$

Postulat: Jeder Körper besitzt eine skalarwertige Eigenschaft, gegeben durch eine positive reelle Zahl die wir träge Masse m nennen. Die Größe ist additiv

$$m_1 + m_2 = m_{\text{ges}}$$

Kraft:

- Ursache der Bewegungsänderung
- vektorielle Größe da $\vec{a}, \vec{r}$ Vektoren

$$\vec{F}$$

Lex secunda (2. Newtonsche Axiom)

In einem Inertialsystem ist die zeitliche Änderung des Impulses eines Körpers (Massenpunktes) gleich der an ihm angreifenden Kraft

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{u})}{dt} = \vec{F}$$

Bem:

- definiert sowohl $\vec{F}$ als auch m
- in Mechanik betrachten wir $\vec{F}$ als gegebene Größe (Ursache von Kräften später)

Superpositionsprinzip der Kräfte

Wirken an einem Körper mehrere Kräfte $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots$

$$\vec{F} = \sum_{j=1}^n \vec{F}_j$$

- Kräfte hängen i.A. vom Ort $\vec{r}$, der Geschwindigkeit $\vec{v}$ des KP sowie der Zeit t ab

$$\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t) \quad \text{Kraftfeld}$$

Wichtige Kräfte

(i) Schwerkraft m_s : schwere Masse

$$\vec{F} = m_s \vec{g}$$

Äquivalenzprinzip

$$m_s \sim m \quad \Rightarrow \quad m_s \stackrel{!}{=} m$$

(ii) Zentralkräfte $\exists$ Inertialsystem mit

$$\vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t) = F(r, \dot{r}, t) \hat{e}_r$$

isotrope harmon. Oszillator

$$F = -m\omega^2 r$$

- Gravitation

$$\vec{F} = - \gamma \frac{mM}{r^2} \quad \gamma > 0$$

- Coulombkraft

$$\vec{F} = \frac{q_1 q_2}{4\pi \epsilon_0 r^2}$$

(iii) Lorentzkraft auf bewegte Ladungen

$$\vec{F} = q \vec{E}(\vec{r}, t) + q \vec{v} \times \vec{B}(\vec{r}, t)$$

$\vec{E}, \vec{B}$ gegebene Vektorfelder (Eddyströmik)

(iv) Reibungskraft

$$\vec{F} = -\alpha(\vec{v}) \vec{v}$$

$$\alpha(\vec{v}) = \text{konst} > 0$$

$$\alpha(\vec{v}) = \vec{\alpha} \cdot \vec{v}$$

Stokes'sche Reibung
Newton'sche $\rightarrow +1 -$

Lex tertium (3-Newton'sches Axiom)

Wirken zwei Körper (Massenpunkte) Kräfte aufeinander aus, und sei $\vec{F}_{12}$ die Kraft von Körper 2 auf Körper 1, sowie $\vec{F}_{21}$ die Kraft von Körper 1 auf Körper 2, so gilt

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \quad \text{actio} = \text{reactio}$$

III. 2 Elementare Probleme der Kinematik

$\Rightarrow$ siehe Vorlesung ExPhys 1

Wurf im Schwerfeld

$$\vec{F} = -mg\hat{e}_z = (0, 0, -mg)$$

2. NA $m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F}$

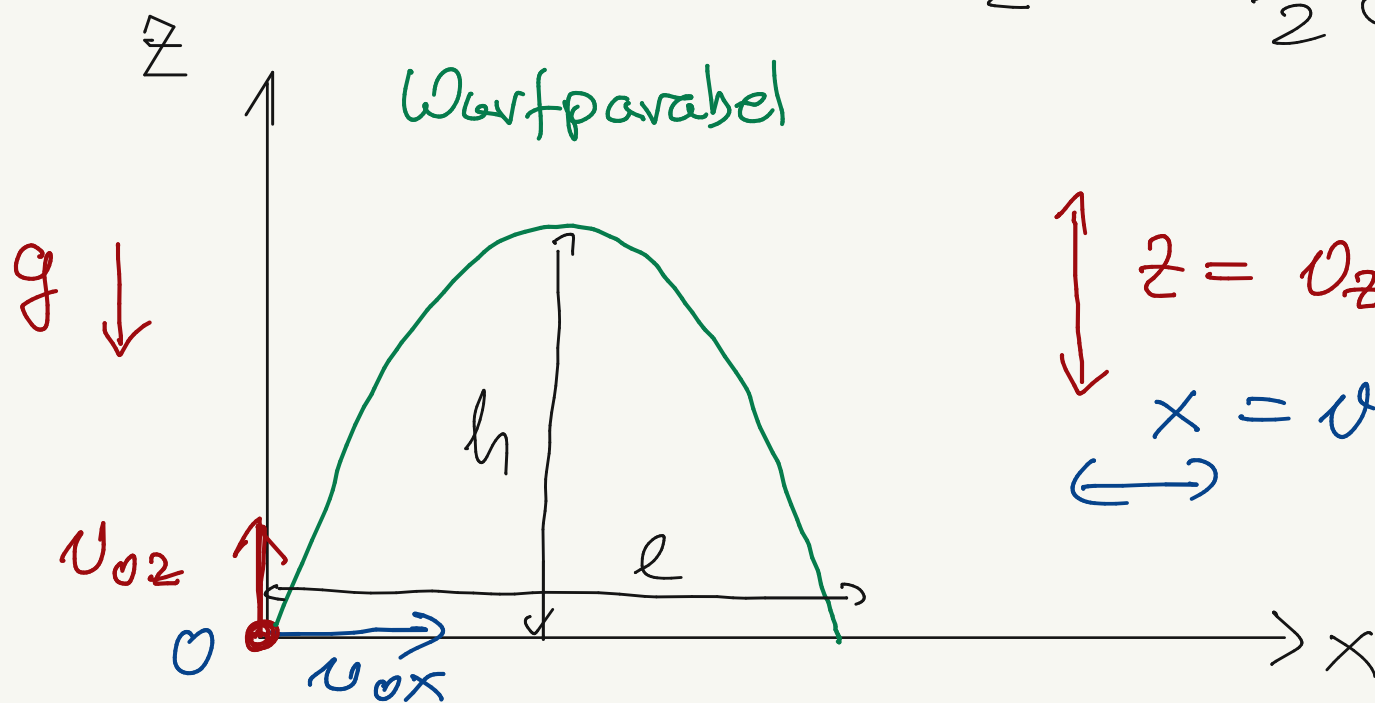
- unabhängige Bewegung in x, y, z

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = 0 \quad \frac{dx}{dt} = v_{x0} \quad x = v_{x0}t + x_0$$

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = 0 \quad \frac{dy}{dt} = v_{y0} \quad y = v_{y0}t + y_0$$

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = -mg \quad \frac{dz}{dt} = -gt + v_{z0}$$

$$z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{z0}t + z_0$$



$$\begin{aligned} \updownarrow z &= v_{z0}t - \frac{1}{2}gt^2 \\ \longleftrightarrow x &= v_{x0}t \end{aligned}$$

Form der Parabel $z = \frac{x}{v_{x0}}$

$$z = \frac{v_{z0}}{v_{x0}} x - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_{x0}^2} \quad \text{quadratische Gleichung}$$

• Wurfweite $\times$ Werte für $z=0$

$$x_1 = 0$$

$$0 = v_{x0} v_{z0} \cancel{x_2} - \frac{1}{2} g \cancel{x_2^2}$$

$$x_2 = \frac{2 v_{x0} v_{z0}}{g} = \ell$$

• Werfhöhe

$$\frac{dz}{dt} = 0 = - g t_m + v_{ze} \quad t_{\max} = \frac{v_{z0}}{g}$$

$$\begin{aligned} \underline{h} = z_{\max} &= v_{z0} t_{\max} - \frac{g}{2} t_{\max}^2 \\ &= \frac{v_{z0}^2}{g} - \frac{g}{2} \frac{v_{z0}^2}{g^2} = \underline{\underline{\frac{1}{2} \frac{v_{z0}^2}{g}}} \end{aligned}$$

III.3 Arbeit, Leistung, Energie; Energieerhaltung

(A) Begriff der Arbeit

Um einen Körper (Massenpunkt) in einem Kraftfeld zu bewegen, bedarf es einer "Anstrengung". Diese wollen wir jetzt quantifizieren.

Def: Die bei einer infinitesimalen Verschiebung $d\vec{r}$ eines Massenpunktes im Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$ geleistete infinitesimale Arbeit ist

$$\delta W = -\vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$1 \rightarrow 2 \quad W_{21} = - \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$$

W_{21} hängt i.A. ab von

(i) $\vec{r}_1, \vec{r}_2$

(ii) $\vec{F}$

(iii) Weg von $\vec{r}_1$ nach $\vec{r}_2$

(iv) zeitlichen Bewegungsablauf

Bem: $-\vec{F} \cdot d\vec{r}$ ist i.A. kein vollständiges Differential, daher " δW " nicht " dW "

Def: Als Leistung bezeichnet man die pro Zeiteinheit geleistete Arbeit

$$P = \frac{dW}{dt} = - \frac{d}{dt} \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$$

$$= - \frac{d}{dt} \int_{t_0}^t dt' \dot{\vec{r}}(t') \cdot \vec{F}(\vec{r}(t'), \dot{\vec{r}}(t'), t')$$

$$\Rightarrow P = -\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) \cdot \dot{\vec{r}} = -\vec{F} \cdot \vec{v}$$

2. N.A. $m \ddot{\vec{r}} = \vec{F}$

$$m \ddot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} = \vec{F} \cdot \dot{\vec{r}} = -P$$

$$\hookrightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^2 \right) = -P$$

Def.: Der Ausdruck $T = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 = \frac{1}{2} m v^2$ wird als kinetische Energie des Massenpunktes bezeichnet

es gilt offensichtlich

$$\frac{d}{dt} T = -P$$

besondere Kraftfelder

Def.: Ein Kraftfeld $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$ heißt konservativ in einem Gebiet $G \in \mathbb{R}^3$ falls es sich in G als negativer Gradient einer skalaren Funktion $V(\vec{r})$ darstellen lässt

$$\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} V(\vec{r}) = -\text{grad } V(\vec{r})$$

Man nennt $V(\vec{r})$ das Potential von $\vec{F}$

Für konservative Kraftfelder gilt

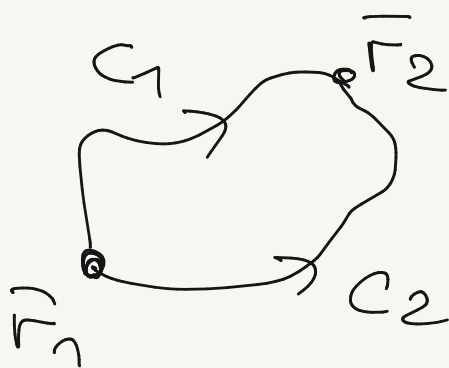
$$\delta W = - \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \vec{\nabla} V(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = dV$$

$$\Rightarrow \delta W = dW \quad \text{vollst. Differential}$$

Wir hatten in der Diskussion von Vektorfeldern folgende Eigenschaften gesehen

Satz Ein Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r})$ ist dann und nur dann konservativ in einem Gebiet $G \in \mathbb{R}^3$ wenn

- (i) Die geleistete Arbeit bei Verschiebung eines MP im Kraftfeld innerhalb G ist wegunabhängig



$$\int_{C_1} d\vec{r} \cdot \vec{F} = \int_{C_2} d\vec{r} \cdot \vec{F}$$

$$\Rightarrow \oint d\vec{r} \cdot \vec{F} = 0$$

- (ii) wenn G einfach zusammenhängend ist gilt

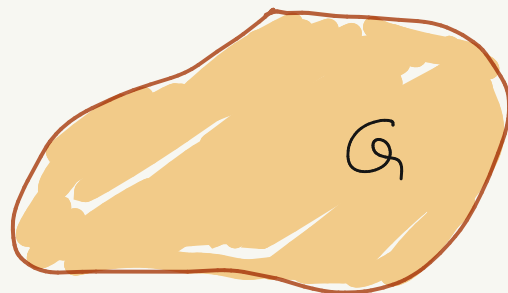
$$\text{rot } \vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F} = 0 \quad \forall \vec{r} \in G$$

Bem;

(i) gilt auch für nicht einfach
zusammenhängende Gebiete G



nicht einfach zshgd.



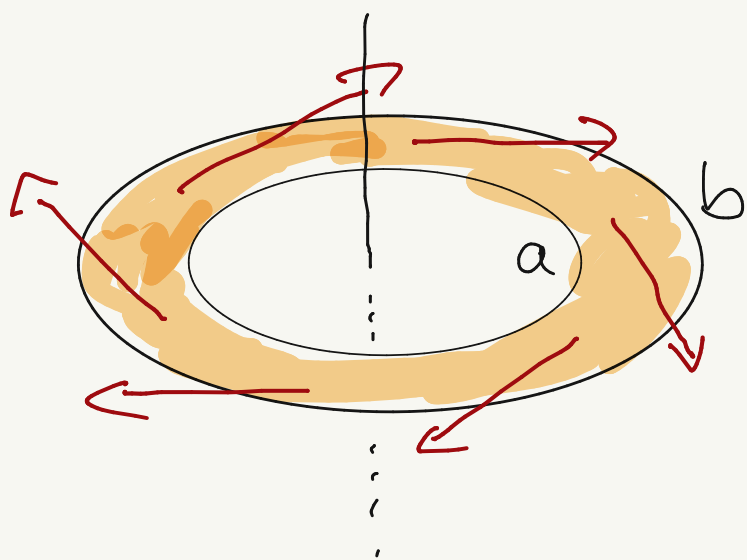
einfach zshgd

Bspl;

$$\vec{F} = F \hat{e}_\varphi$$

$$0 < a \leq r \leq b$$

$$F = \text{const.}$$



es gilt $\text{rot } \vec{F} = 0$ in G

abw $\oint_C d\vec{r} \cdot \vec{F} \neq 0$

Satz:

Zeit- und Geschwindigkeitsunabhängige
Kraftfelder in einer Dimension sind
stets konservativ

$$\vec{F} = F(x) \hat{e}_x = - \frac{dV(x)}{dx} \hat{e}_x$$

$$V(x) = \int_{x_0}^x dx' F(x') + \text{const.}$$



Satz: Zeit- und geschwindigkeit unabhängige
Zentralkraftfelder sind stets konservativ

$$\vec{F} = F(r) \vec{e}_r = - \frac{dV(r)}{dr} \vec{e}_r = -\vec{\nabla} V(r) \vec{e}_r$$

$$V(r) = \int_{r_0}^r dr' F(r') + \text{const.} \quad \checkmark$$

• Warum sind konservative Kraftfelder so interessant?

Satz: Bewegt sich ein Massenpunkt in einem konservativem Kraftfeld $\vec{F}$ mit Potential $V(\vec{r})$, so existiert eine Erhaltungsgröße, die wir Energie nennen

$$E = V(\vec{r}) + T \quad \frac{dE}{dt} = 0$$

Energieerhaltungssatz

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{dV}{dt} = -\frac{dT}{dt} \Rightarrow \frac{d}{dt}(V+T) = 0$$

allgemein

$$\vec{F} = \vec{F}_{\text{konservativ}} + \vec{F}_{\text{dissipativ}} \\ = -\vec{\nabla} V + \vec{F}_{\text{diss}}$$

$$\frac{d}{dt} [V+T] = \frac{d}{dt} E = \vec{F}_{\text{diss}} \cdot \vec{v}$$

Die Änderung der Energie ist gleich der (negativen) Leistung dissipativer Kräfte

Bem.: $\exists$ energiehaltende aber nicht konservative Kräfte, z.B. Lorentzkraft in konstantem Magnetfeld

$$\vec{F}_L = q \vec{v} \times \vec{B} \neq -\vec{\nabla} V$$

$$\text{aber } \vec{F}_L \cdot d\vec{r} = q \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{B} \right) \cdot d\vec{r} \stackrel{!}{=} 0$$

spatprodukt mit zwei parallelen Vektoren

10.11.2010



III.4 Zur Integration eindimensionaler Probleme mit ortsabhängiger Kraft

hier 1D und nur ortsabhängige Kraft

$$\vec{F} = F(x) \vec{e}_x$$

$$\Rightarrow F(x) = - \frac{dV(x)}{dx}$$

$$\text{es gilt } \frac{d}{dt} E = \frac{d}{dt} (T+V) = 0$$

$$E = \frac{m}{2} \dot{x}^2 + V(x) = \text{konst.}$$

Diese Gleichung kann sofort integriert (gelöst) werden

$$\frac{m}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = E - V(x) \quad \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2(E - V(x))}{m}}$$

$$\frac{dt}{dx} = \sqrt{\frac{m}{2(E - V(x))}}$$

$$\int_{t_0}^t dt = \int_{x_0}^x \frac{dx'}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x'))}}$$

$$t - t_0 = \int_{x_0}^x \frac{dx'}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x'))}}$$

allgemeine
(implizite)
Lösung
1-dimensionalen
Problems

- Anfangsbedingungen

$$X(t_0) = x_0$$

$$\dot{X}(t_0) \Leftrightarrow E = \frac{m}{2} \dot{X}(t_0)^2 + V(x_0)$$

- wichtige Folgerungen

(i) erlaubter Bereich der Bewegung

$$E - V(x) \geq 0$$

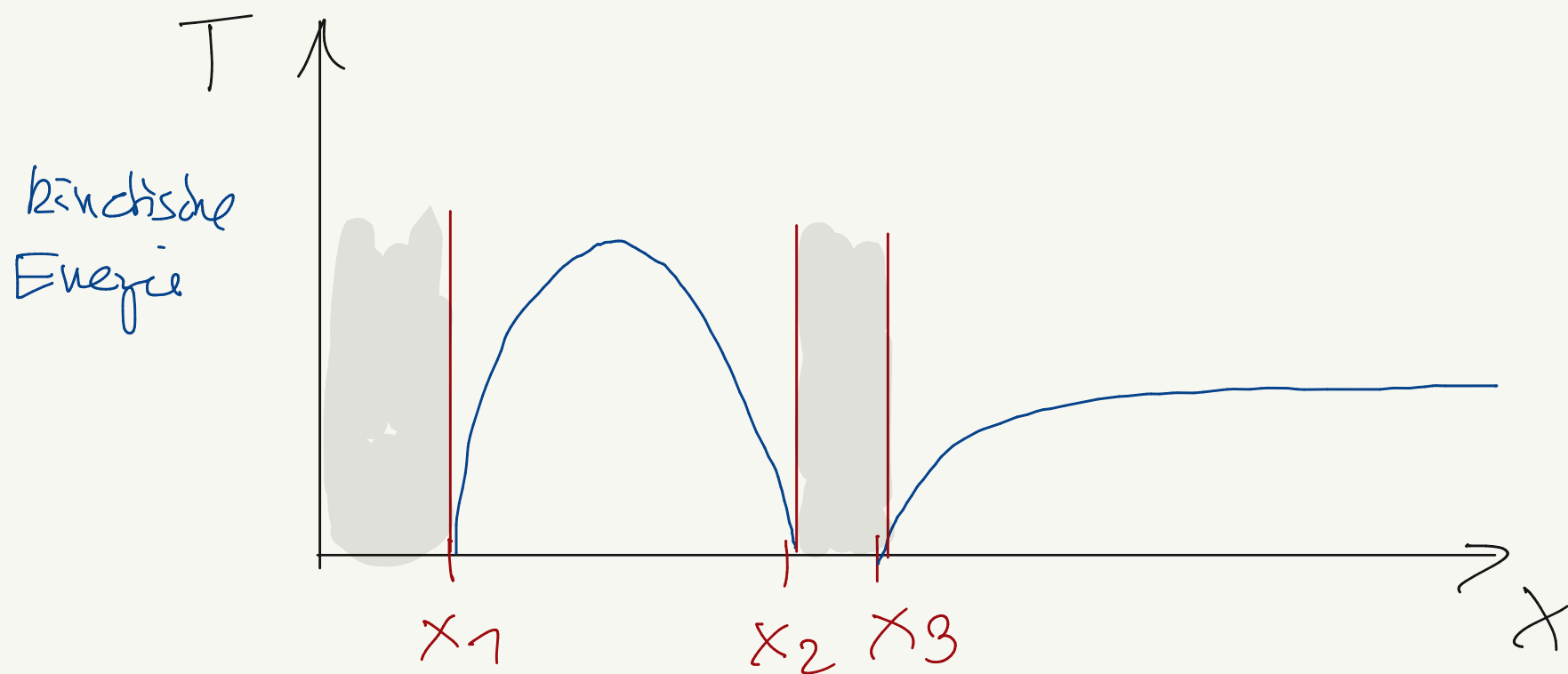
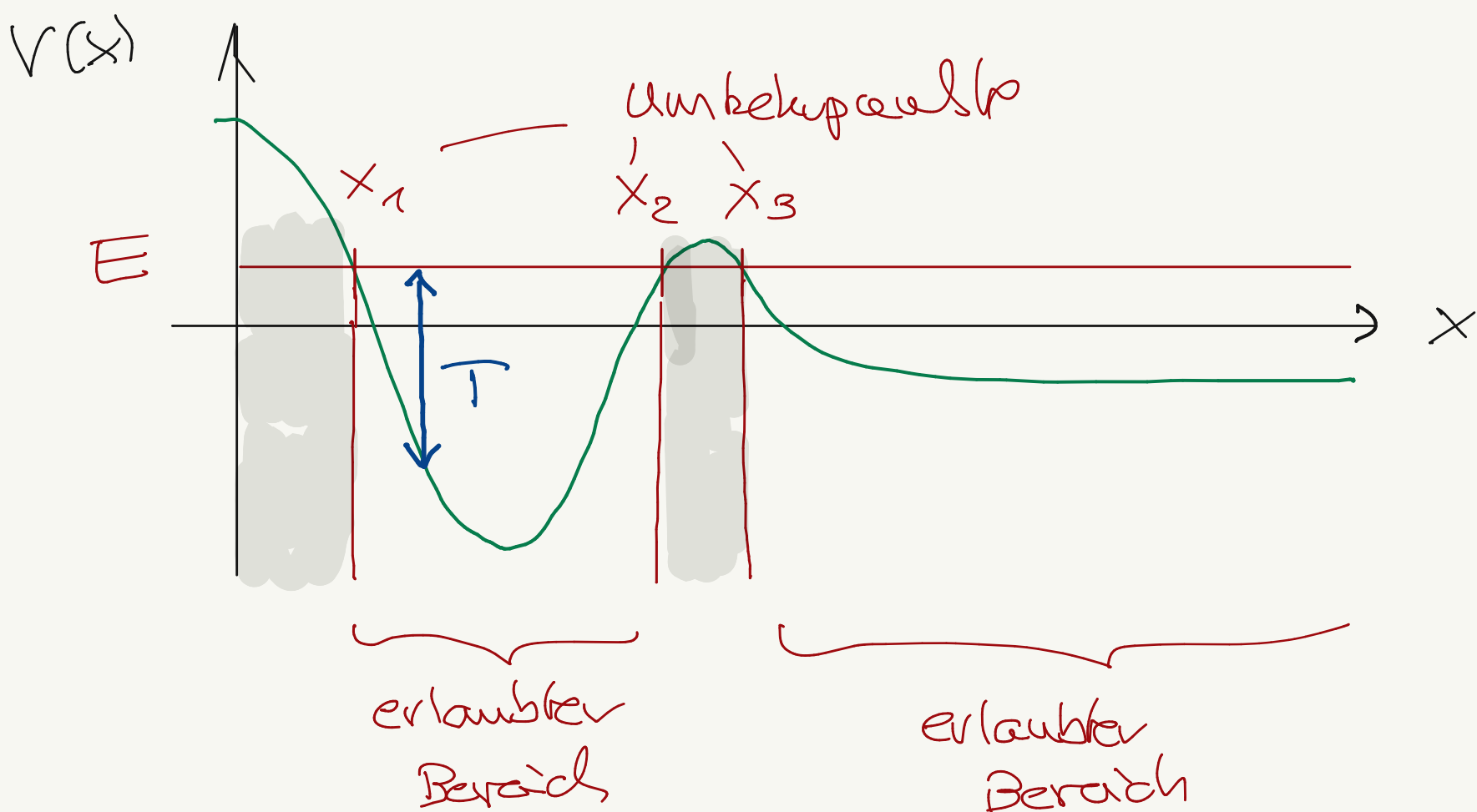
(ii) Umkehrpunkte bzw. asymptotische Punkte der Bewegung

$$E - V(x_0) = 0$$

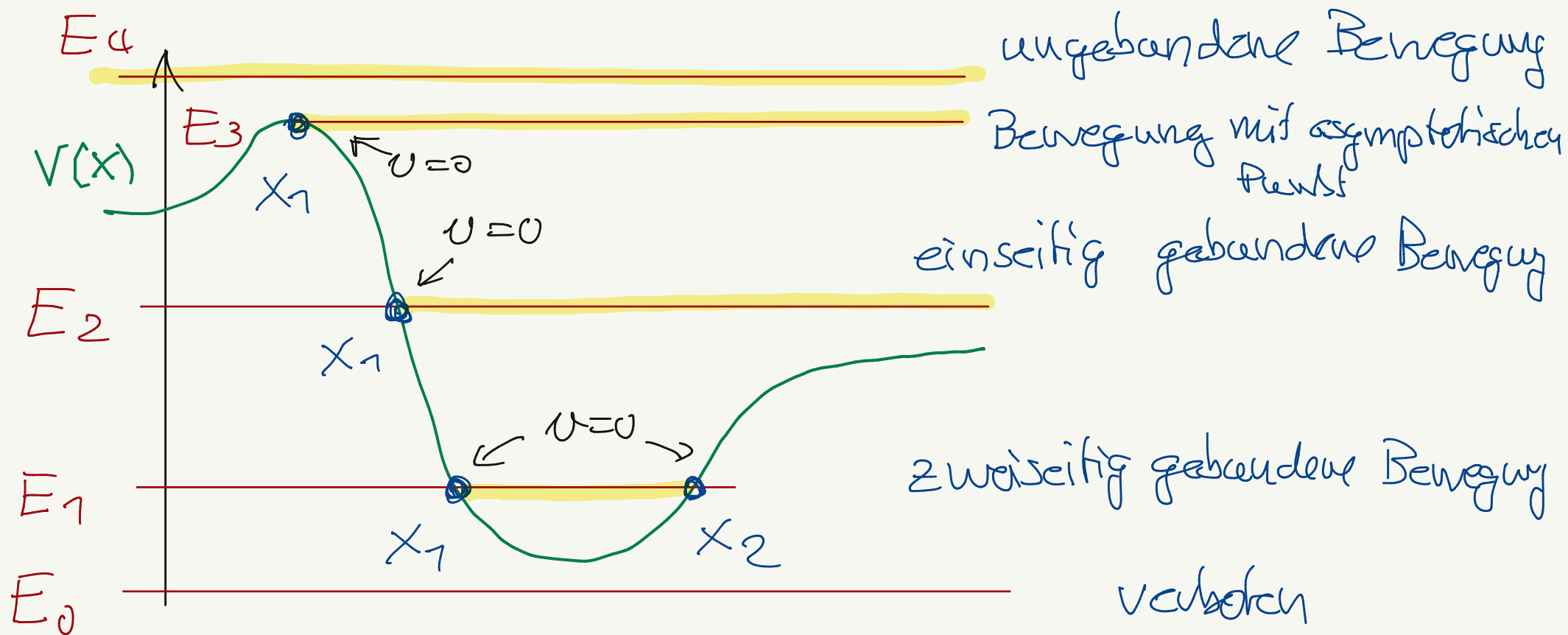
An den Umkehrpunkten verschwindet die kinetische Energie

$$T(x_0) = \frac{m}{2} \dot{x}_0^2 = E - V(x_0) = 0$$

$$\Rightarrow \dot{x}_0 = 0$$



Klassifikation von Bewegungen



Bem: (i) asymptotischer Punkt

$$T=0 \Leftrightarrow \dot{x}=0$$

$$\text{und } \frac{dV}{dx}=0 \Rightarrow m\ddot{x} = -\frac{dV}{dx}=0$$

Bewegung kommt zum Stillstand!
In der Nähe des Maximums ($\frac{dV}{dx}=0$) gilt
Taylorentwicklung

$$V(x) \approx V(x_0) - \frac{1}{2}m\alpha^2(x-x_0)^2$$

$$= E - \frac{1}{2}m\alpha^2(x-x_0)^2 \quad (T=0)$$

Zeit bis zum Erreichen des asymptotischen Punktes
- ε

$$\tau = \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-V(x))}} dx \approx \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} \frac{1}{\alpha(x-x_0)} dx = \frac{1}{\alpha} \ln \frac{1}{\varepsilon}$$

Für $\varepsilon \rightarrow 0$ geht $\ln \frac{1}{\varepsilon} \rightarrow \infty$!

D.h. es braucht unendlich lange bis der Kostenpunkt am Maximum angekommen ist!

(ii) beidseitig gebundene Bewegung

→ periodische Bewegung

Periode $\frac{T_P}{2} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m} (E - V(x))}}$

wobei $V(x_1) = V(x_2) = E$

III. 5 Der Phasenraum

Nun wollen wir allgemeine Kräfte in 1D betrachten, die auch Geschwindigkeits- (impulsabhängig) sein können.

Bei gegebener Kraft

$$\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = \vec{F}(\vec{r}, \vec{p}, t)$$

und Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} \vec{r}(t_0) &= \vec{r}_0 \\ \dot{\vec{r}}(t_0) &= \vec{v}_0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} \vec{r}(t_0) &= \vec{r}_0 \\ \vec{p}(t_0) &= \vec{p}_0 = m \vec{v}_0 \end{aligned}$$

kann die Bewegung stets eindeutig aus der Lösung zweier gekoppelter Differentialgleichungen 1. Ordnung bestimmt werden

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \vec{r} \\ \vec{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{p}/m \\ \vec{F}(\vec{r}, \vec{p}, t) \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \vec{r}(t_0) \\ \vec{p}(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{r}_0 \\ \vec{p}_0 \end{pmatrix}$$

Def: Die Menge der Punkte $(\vec{r}(t), \vec{p}(t)) \in \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3 = \mathcal{P}$ bildet den Phasenraum

- Trajektorien im Phasenraum charakterisieren die Bewegung vollständig.
- Die Lösung $(\vec{r}(t), \vec{p}(t))$ mit $(\vec{r}(t_0) = \vec{r}_0, \vec{p}(t_0) = \vec{p}_0)$ heißt Integralkurve des Kraftfeldes $\vec{F}$

Bspl.: (i) harmonischer Oszillator in 1D

$$V(x) = \frac{1}{2} m \omega^2 x^2$$



$$\vec{F}(x) = -\frac{dV(x)}{dx} \vec{e}_x = -m\omega^2 x \vec{e}_x$$

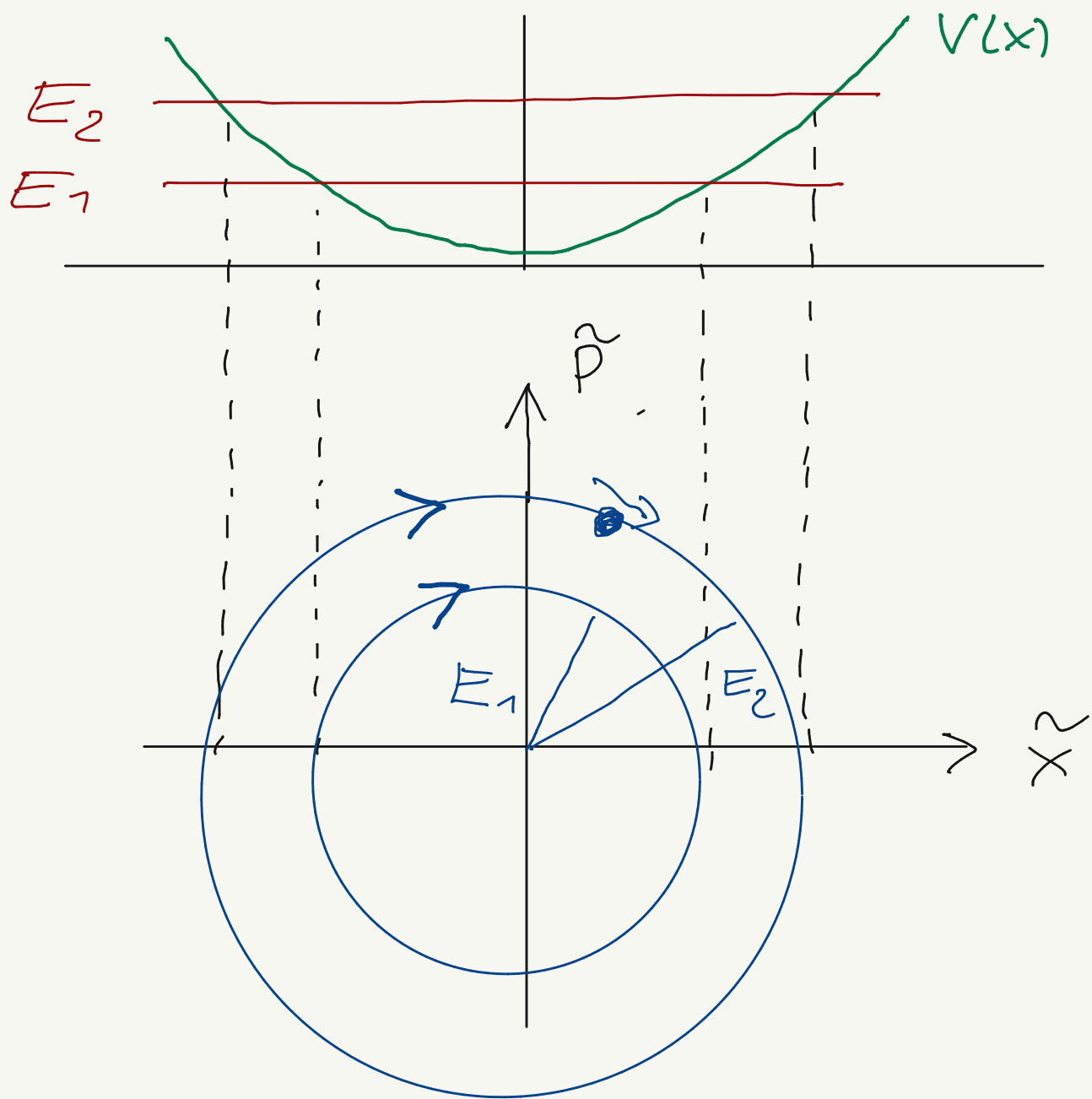
$$E = \frac{m}{2} v^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} x^2 = \text{const}$$

skalierte Variable

$$\tilde{x} = \omega \sqrt{m} x$$

$$\tilde{p} = \frac{p}{\sqrt{m}}$$

$$\Rightarrow E = \frac{1}{2} (\tilde{x}^2 + \tilde{p}^2) \quad \text{Kreisgleichung!}$$

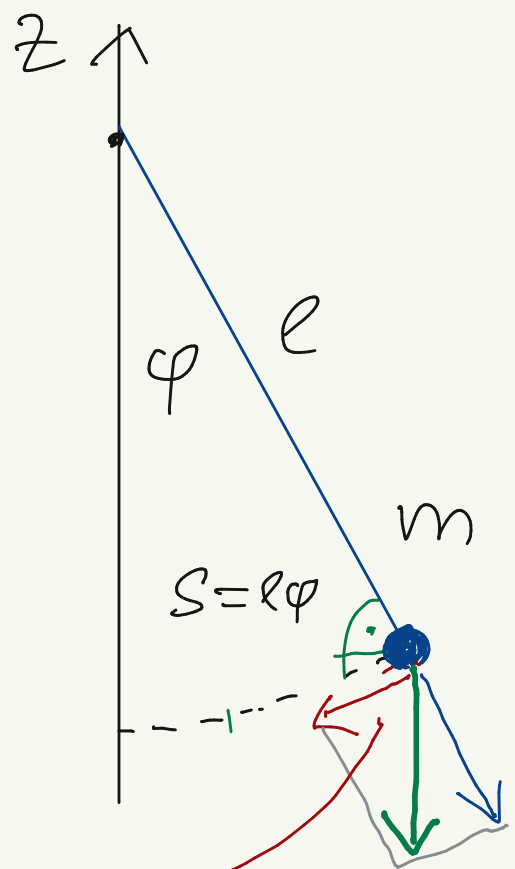


(ii) mathematisches Pendel im Schwerfeld

$$T = T(\dot{\varphi}) = \frac{1}{2} m \dot{s}^2 = \frac{1}{2} m e^2 \dot{\varphi}^2$$

$$F_{\pm} = F_{\pm}(\varphi) = -mg \sin \varphi$$

$$\begin{aligned} V(\varphi) &= \int_0^s ds' \, mg \sin \varphi' \\ &= \int_0^{\varphi} d\varphi' \, m g e \sin \varphi' \\ &= m g e (1 - \cos \varphi) \end{aligned}$$



$$F_{\pm} = -mg \sin \varphi \quad \vec{F} = -mg \vec{e}_z$$

Energiehaltung

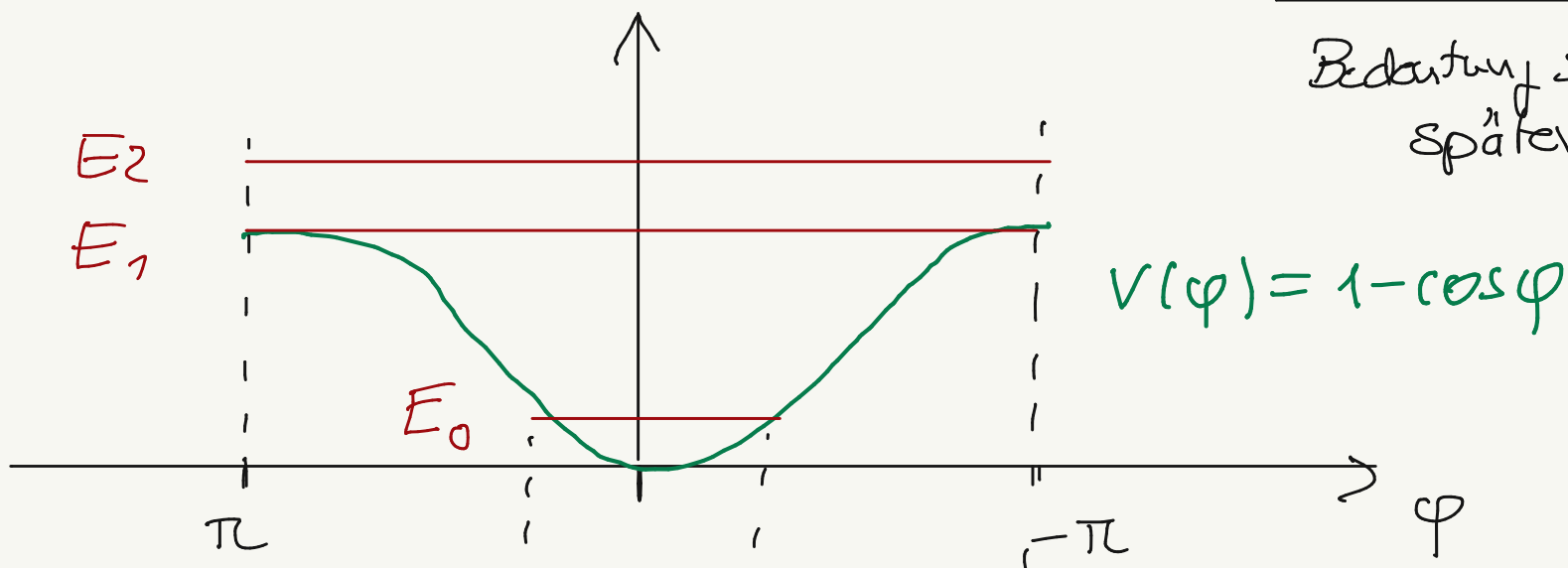
$$\frac{1}{mgl}$$

$$E = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\varphi}^2 + mgl(1 - \cos \varphi) = \text{konst}$$

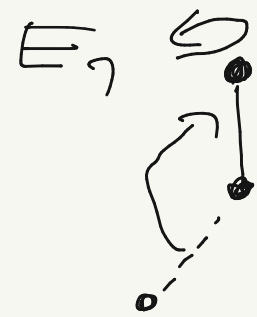
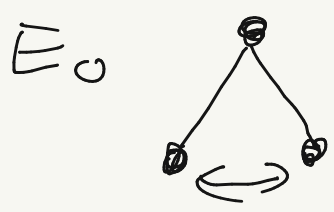
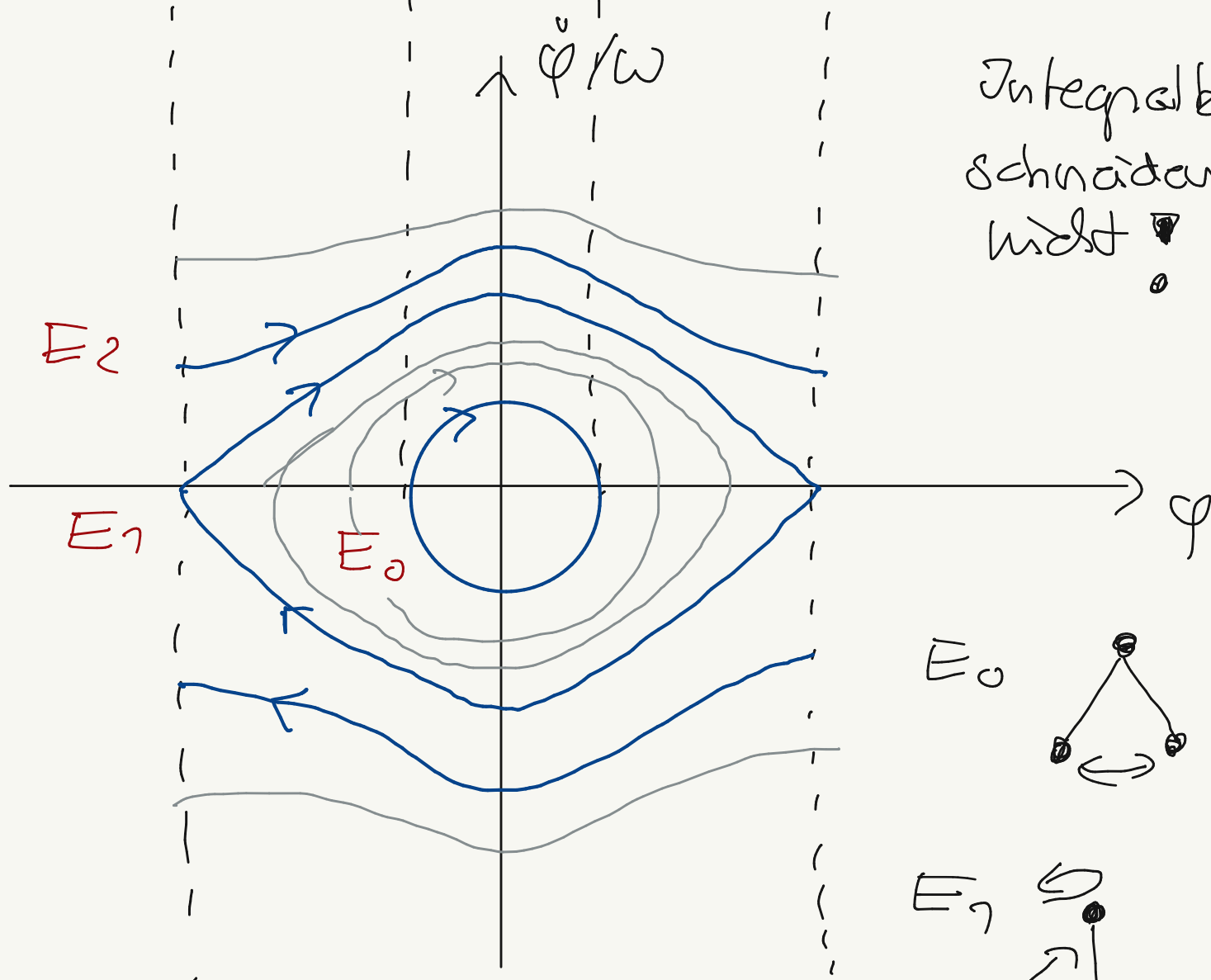
$$\varepsilon = \frac{E}{mgl} = \frac{1}{2\omega^2} \dot{\varphi}^2 + 1 - \cos \varphi$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

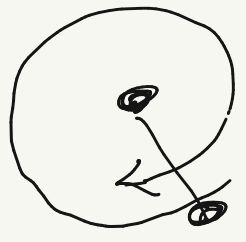
Bedeutung siehe
später



Integralkurven
schneiden sich
nicht!



E_2



Periodendauer

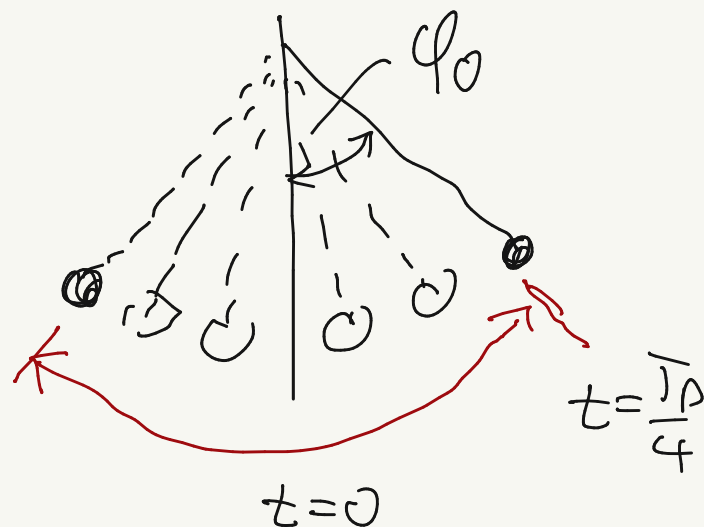
$$\varepsilon = \frac{1}{2\omega^2} \dot{\varphi}^2 + 1 - \cos \varphi \stackrel{!}{=} 1 - \cos \varphi_0$$

φ_0 ist maximaler Winkel aussehlag

$$\dot{\varphi}_0 = 0$$

$$\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt} = \sqrt{2\omega^2(\cos \varphi - \cos \varphi_0)}$$

$$dt = \frac{d\varphi}{\sqrt{2\omega^2(\cos \varphi - \cos \varphi_0)}}$$



$$\frac{T_p}{4} = \int_0^{T_p/4} dt = \frac{1}{\sqrt{2}\omega} \int_0^{\varphi_0} d\varphi \frac{1}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \varphi_0}}$$

→ 16.11.20

$$\cos \varphi - \cos \varphi_0 = 2 \left\{ \frac{1 - \cos \varphi_0}{2} - \frac{1 - \cos \varphi}{2} \right\} = 2 \left\{ \sin^2 \frac{\varphi_0}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right\}$$

$$k = \sin^2 \frac{\varphi_0}{2}$$

$$\sin \frac{\varphi}{2} = \sqrt{k} \sin \vartheta$$

$$\frac{d(\sin \frac{\varphi}{2})}{d\vartheta} = \frac{1}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \frac{d\varphi}{d\vartheta} = \sqrt{k} \cos \vartheta \quad \varphi = \varphi_0 \Rightarrow \vartheta = \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\varphi_0} \frac{1}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \varphi_0}} d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{\varphi_0} \frac{1}{\sqrt{\sin^2 \frac{\varphi_0}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2}}} d\varphi$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{k - k \sin^2 \vartheta}} d\vartheta$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} d\varphi \frac{\cancel{2\cos\varphi} \sqrt{k}}{\cos \frac{\varphi}{2} \cancel{\sqrt{k} \cos\varphi}} = \int_0^{\pi/2} d\varphi \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\varphi}{2}}}$$

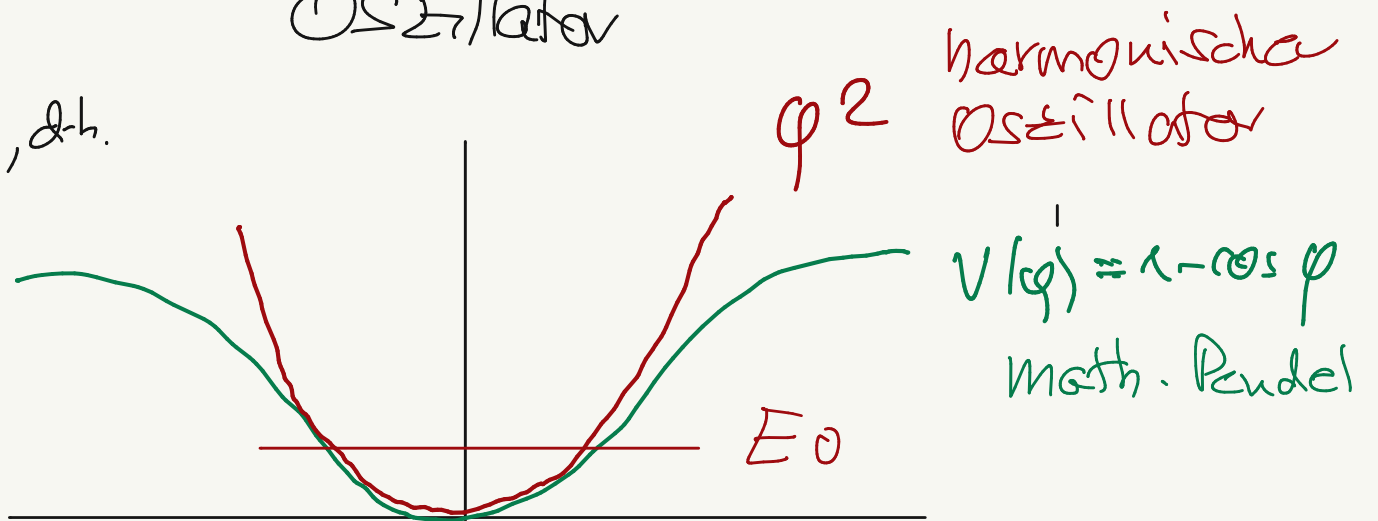
$$= \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k \sin^2 \varphi}} = K(k) \quad \text{vollständig Elliptisches Integral}$$

$$T_P = 4 \frac{1}{\omega} K(k) = 4 \sqrt{\frac{L}{g}} K(k)$$

• Das mathematische Pendel und der harmonische Oszillator

für kleine Energie, d.h.
kleine Auslenkung φ

$\Rightarrow V(\varphi)$
quadratisch in φ



$$k = \sin^2 \frac{\varphi_0}{2} \text{ klein} \quad \frac{1}{\sqrt{1-u}} \approx 1 + \frac{1}{2}u$$

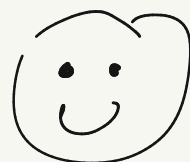
$$\begin{aligned} \text{d.h.} \quad K(k) &= \int_0^{\pi/2} d\varphi \frac{1}{\sqrt{1 - k \sin^2 \varphi}} \approx \int_0^{\pi/2} d\varphi \left(1 + \frac{k}{2} \sin^2 \varphi \right) \\ &= \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{k}{4} \right) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$T_p \approx 4 \frac{1}{\omega} \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{k}{4} \right) = \frac{2\pi}{\omega} \left(1 + \sin^2 \frac{\varphi_0}{2} \right)$$

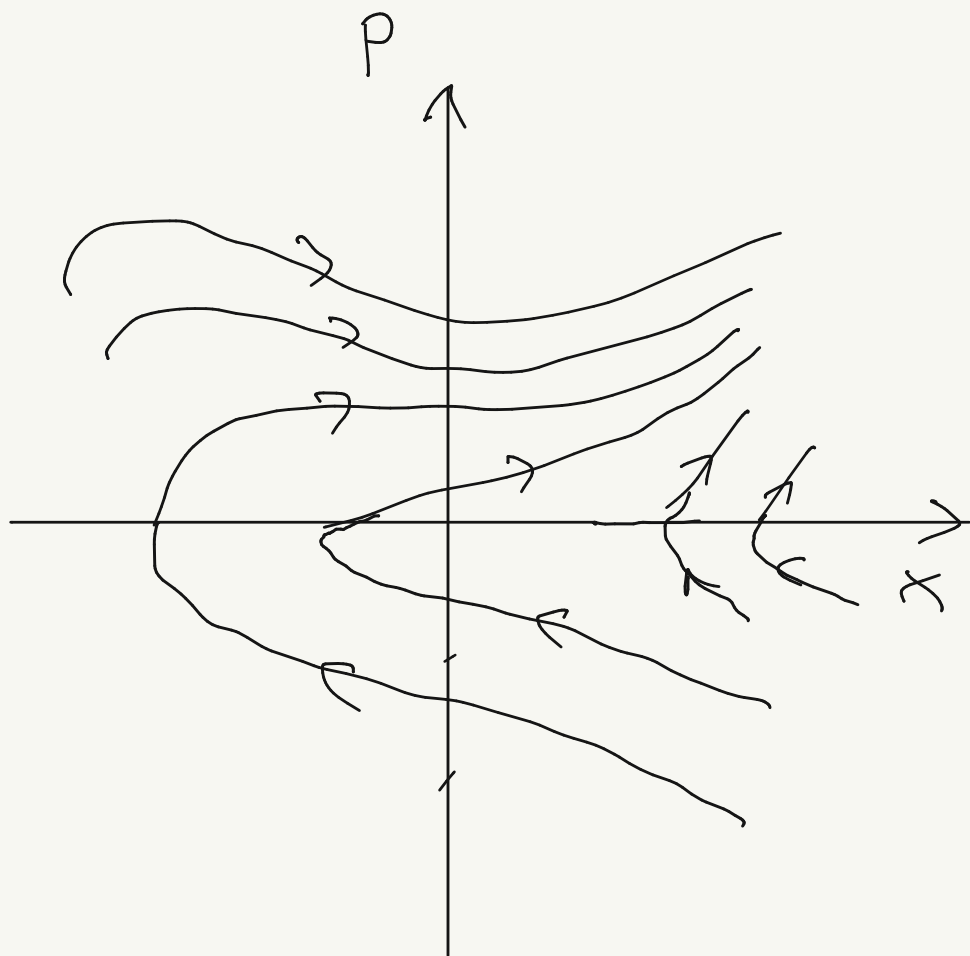
$$T_p \xrightarrow{\varphi_0 \rightarrow 0} \frac{2\pi}{\omega}$$

harmonischer Oszillator

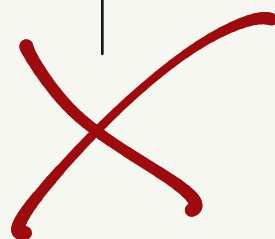
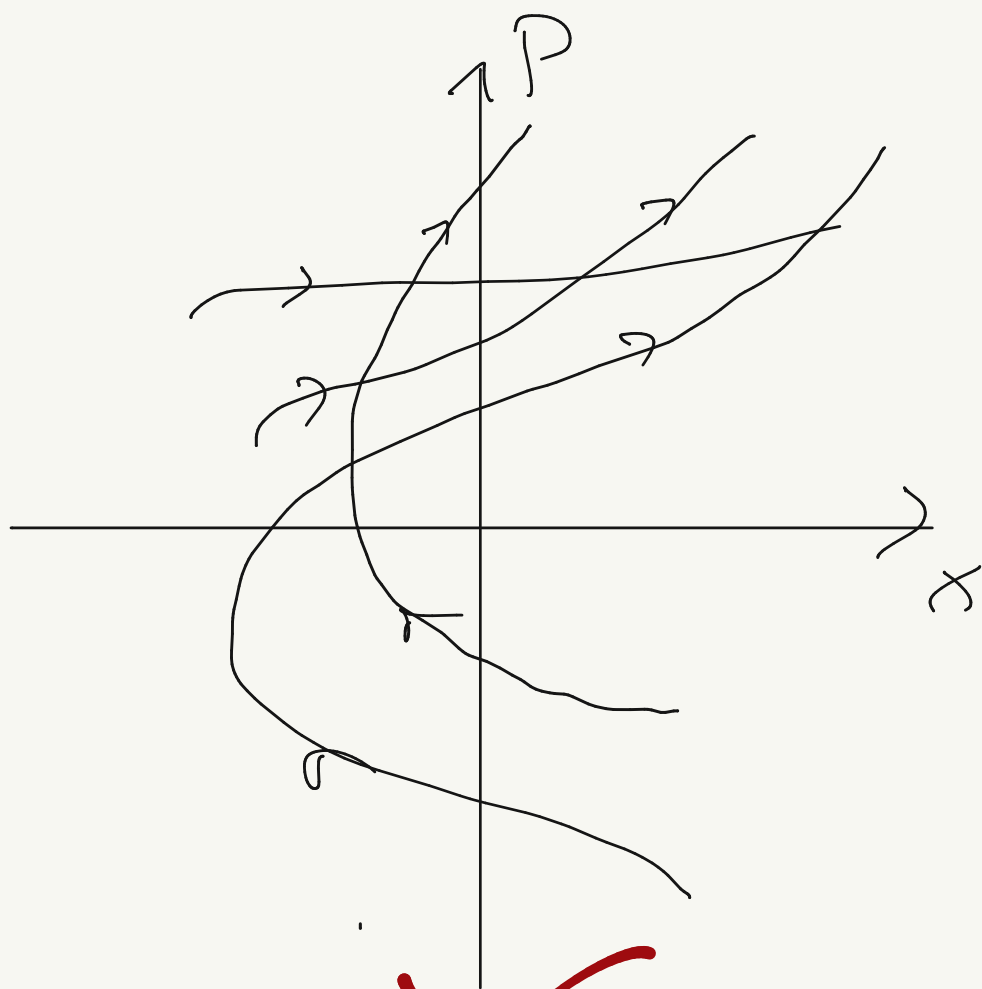


Satz: (Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen der Bewegungsgleichungen.)

Falls $\vec{F}(\vec{r}, \vec{p}, t)$ stetig und bzgl. $\vec{r}$ und $\vec{p}$ differenzierbar
 $\Rightarrow$ Für jedes $\vec{r}(t_0), \vec{p}(t_0), t_0$ gibt es genau eine Lösung der Bewegungsgleichung



yes



no

III. 6 Drehimpuls und Drehmoment

Nachdem wir eindimensionale Probleme diskutiert haben, wollen wir nun die Mechanik eines MP in 3D betrachten

lex secunda $m \ddot{\vec{r}} = \vec{F}$

wir hatten

$$m \ddot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} = \vec{F} \cdot \dot{\vec{r}}$$

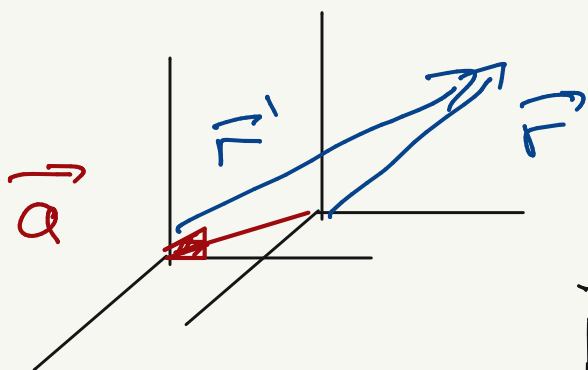
$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^2 \right) = -P$$

nun

$$m \vec{r} \times \ddot{\vec{r}} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Def: Die Größe $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ heißt
Drehmoment der Kraft $\vec{F}$ am Ort $\vec{r}$
bezgl. des Ursprungs

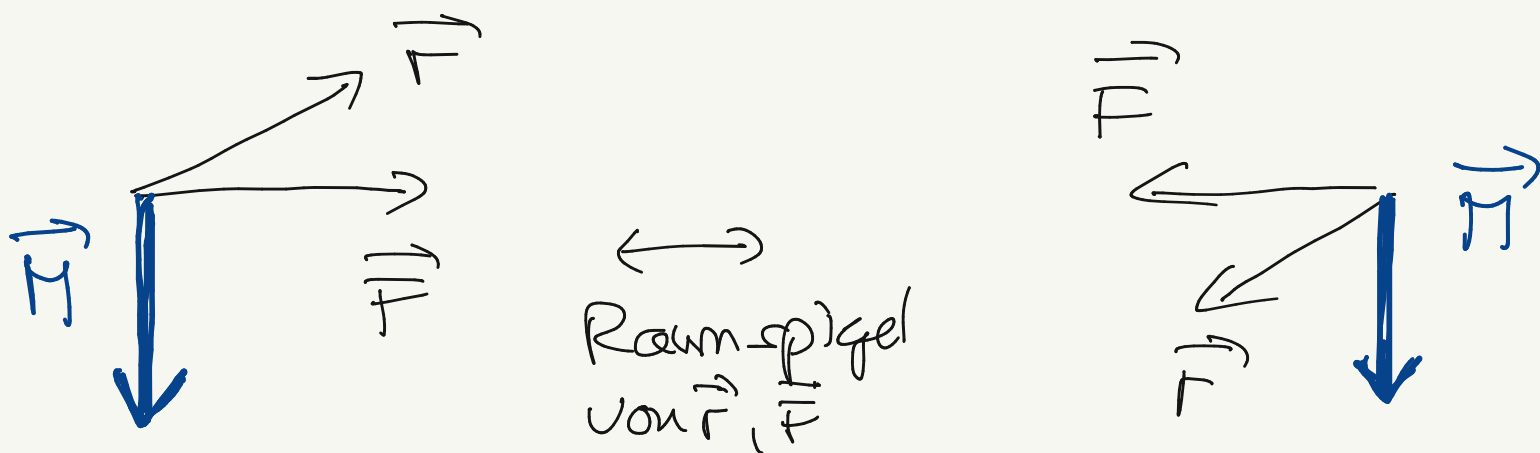
Bem: (i) $\vec{M}$ hängt von der Wahl des
Bezugspunktes (Koordinatenurspr.)
ab



$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{a}$$

$$\begin{aligned} \vec{M}' &= \vec{r}' \times \vec{F} = (\vec{r} - \vec{a}) \times \vec{F} \\ &= \vec{M} - \vec{a} \times \vec{F} \end{aligned}$$

(ii) $\vec{r}$ and $\vec{F}$ sind polare Vektoren, $\Rightarrow$
 $\vec{M}$ ist ein axialer Vektor



es gilt

$$m \vec{r} \times \ddot{\vec{r}} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}$$

$$= \frac{d}{dt} (\vec{r} \times m \dot{\vec{r}}) = \vec{M} \quad \left((\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}}) \stackrel{!}{=} 0 \right)$$

Def: Die Größe $\boxed{\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}} = \vec{r} \times m \dot{\vec{r}}$ wird
Drehimpuls eines Massenpunktes der Masse m
 am Ort $\vec{r}$ bzgl. des Koordinatenursprungs
 genannt

Bem: (i) auch $\vec{L}$ hängt von der Wahl des
 Koordinatenursprungs ab
 (ii) $\vec{L}$ ist ebenfalls ein axialer Vektor

Satz: (Drehimpulsatz)

Die zeitliche Änderung des Drehimpulses entspricht dem angreifenden Drehmoment

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$$

Ähnlich zur 1. Secunda $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$ $\begin{matrix} \vec{p} \rightarrow \vec{L} \\ \vec{F} \rightarrow \vec{M} \end{matrix}$

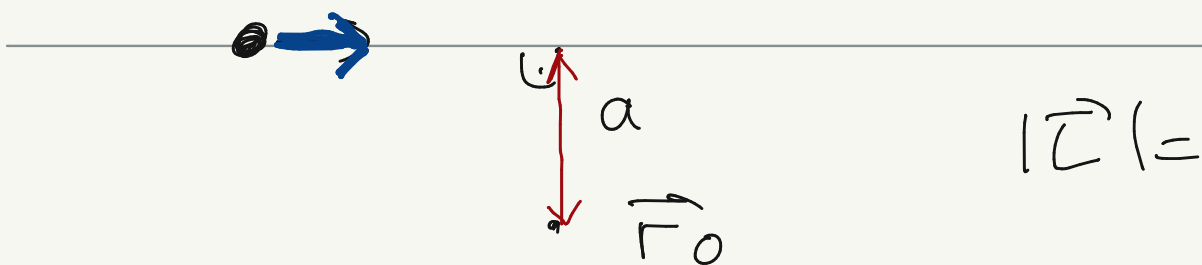
Satz: (Drehimpulserhaltungssatz)

Besitzt ein Kraftfeld $\vec{F}$ einen Punkt $\vec{r}_0$ bzgl. dem das Drehmoment $\vec{M} = (\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{F}$ verschwindet, so ist der Drehimpuls eines Massenpunktes bzgl. $\vec{r}_0$ zeitlich konstant, d.h. eine Erhaltungsgröße

"bzgl. $\vec{r}_0$ " heißt hier Verschiebung des Koordinatenursprungs nach $\vec{r}_0$

Bem.: (i) $\vec{M} = 0$ falls $\vec{F} = 0$ (trivial)

$$m\vec{a} = \text{konst}$$



$$|\vec{L}| = amr = \text{konst}$$

(ii) $\vec{M} = 0$ falls $\vec{F}$ Zentralkraftfeld und der Koordinatenursprung = Mittelpunkt des Zentralkraftfeldes

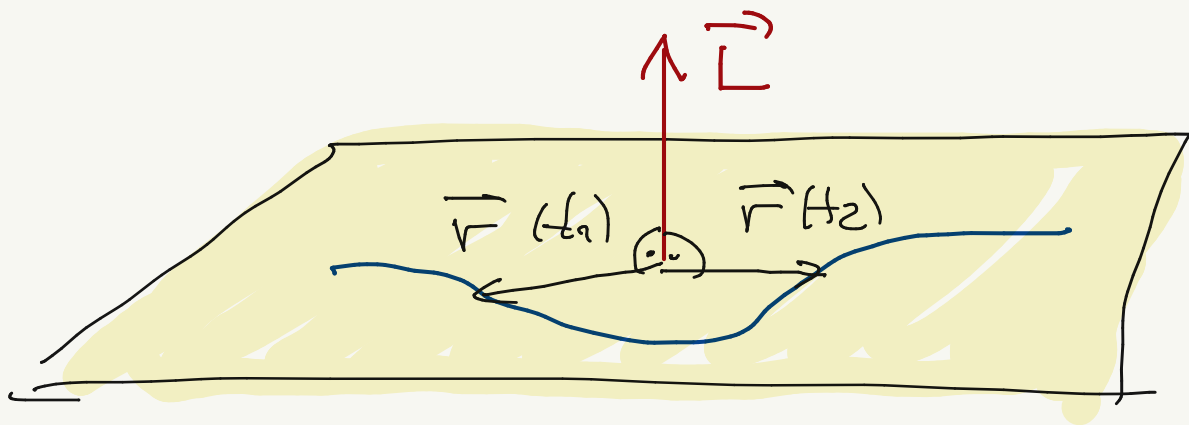
$$\vec{F} = F \hat{e}_r$$

$$\vec{r} \times \vec{F} = r F \hat{e}_r \times \hat{e}_r = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = 0$$

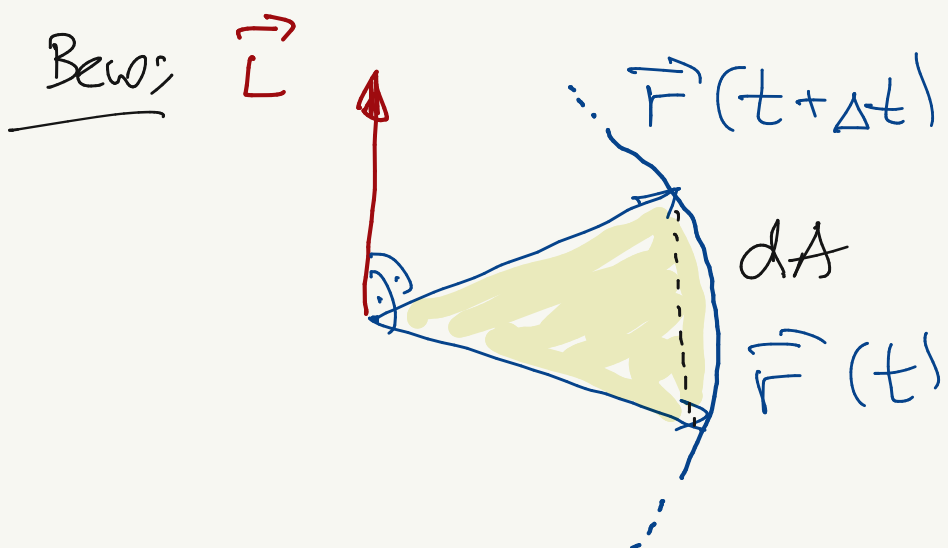
Satz: Bei Drehimpulserhaltung bewegt sich der Massenpunkt auf einer zum Drehimpuls senkrechten Ebene, die den Koordinatenursprung (Bezugspunkt des Drehimpulses) enthält

$$\vec{r} \cdot \vec{L} = \vec{r} \cdot (\vec{r} \times \vec{p}) = 0$$



Satz: (Flächensatz)

Bei Drehimpulserhaltung überstreicht der Radiusvektor (Fahrstrahl) des Massenpunktes in gleichen Zeiten gleiche Flächen



$$\begin{aligned} dA &= \frac{1}{2} |\vec{r}(t) \times \vec{r}(t+dt)| \\ &= \frac{1}{2} |\vec{r}(t) \times (\vec{r}(t) + \dot{\vec{r}}(t) dt)| \\ &= \frac{1}{2} dt |\vec{r} \times \dot{\vec{r}}| = \frac{|\vec{L}|}{2m} dt \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dA}{dt} = \frac{|\vec{L}|}{2m} = \frac{L}{2m} = \text{konst}}$$

III.7 Zur Integration dreidimensionaler Probleme mit zeit- und geschwindigkeits-unabhängiger Zentralkraft

betrachten zeit- und geschwindigkeitsunabhängige Zentralkraft

$$\vec{F}(\vec{r}, \vec{p}, t) = F(r) \vec{e}_r$$

(i) $\vec{F}$ ist konservativ $\Rightarrow$ E ist erhalten!

$$E = \frac{m}{2} \vec{v}^2 + V(r) = \text{konst.} \quad \text{eine Bedingung}$$

(ii) Drehmoment bzgl. Ursprung verschwindet

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = 0 \Rightarrow \underline{\vec{L} \text{ ist erhalten!}}$$

$$\vec{L} = m(\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) = \text{konst} \quad \text{drei Bedingungen}$$

Man nennt E und $\vec{L}$ erste Integrale der Bewegung

Folgerungen:

Konstanz von $\vec{L}$ beschränkt die Bewegung auf eine Ebene senkrecht zu $\vec{L}$