

II. Vektoranalysis Teil 1

II.1 Gradient

• $f(x) \quad \frac{df}{dx} = f'(x)$

Maß für die
Änderung der Funktions-
f bei $x \rightarrow x+dx$

$$df = f'(x) dx$$

• $f(x,y,z) \quad \frac{\partial f}{\partial x}$
 $\frac{\partial f}{\partial y}$

Änderung bei $x \rightarrow x+dx$

— " $y \rightarrow y+dy$ etc.

$d\vec{r} = (dx, dy, dz)$ Vektor

$$df = \vec{v} \cdot d\vec{r}$$

$$\vec{v} = ?$$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) \cdot (dx, dy, dz)$$

$$\vec{v} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z \right) f$$

$$\vec{v} = \text{grad } f = \vec{\nabla} f$$

Gradient von f

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

Nabla Operator

Rechenregeln

$$\vec{\nabla}(f+g) = \vec{\nabla}f + \vec{\nabla}g$$

$$\vec{\nabla}fg = f\vec{\nabla}g + g\vec{\nabla}f$$

Bspl:

(i)

$$f(\vec{r}) = \vec{a} \cdot \vec{r} = a_x x + a_y y + a_z z$$

$$\vec{\nabla}f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) = (a_x, a_y, a_z)$$

(ii)

$$f(\vec{r}) = f(r) \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial r} \frac{x}{r} \quad \text{analog } y, z$$

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}f(r) &= f'(r) \left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r} \right) \\ &= f'(r) \frac{\vec{r}}{r} = f'(r) \vec{e}_r \end{aligned}$$

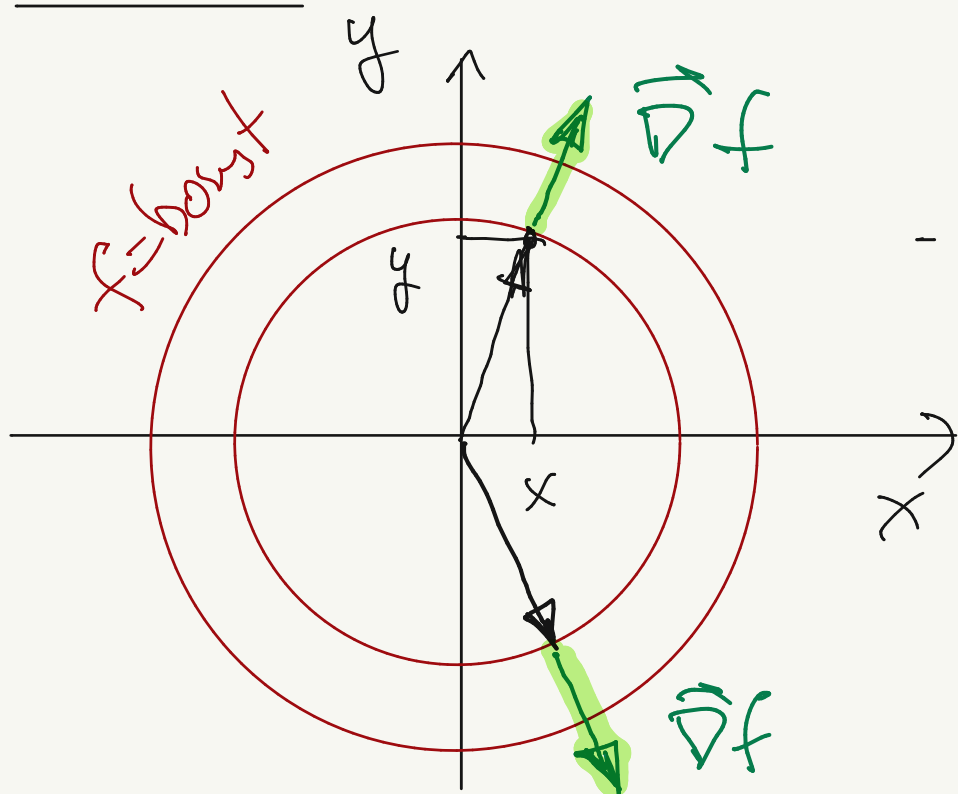
Der Gradient $\text{grad} f = \vec{\nabla}f$ steht senkrecht auf den Flächen $f(x, y, z) = \text{konst}$

Bew.: Sei $d\vec{r}$ in Fläche mit $f = \text{konst}$

$$0 \stackrel{!}{=} df = \vec{\nabla}f \cdot d\vec{r}$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla}f \perp d\vec{r}$$

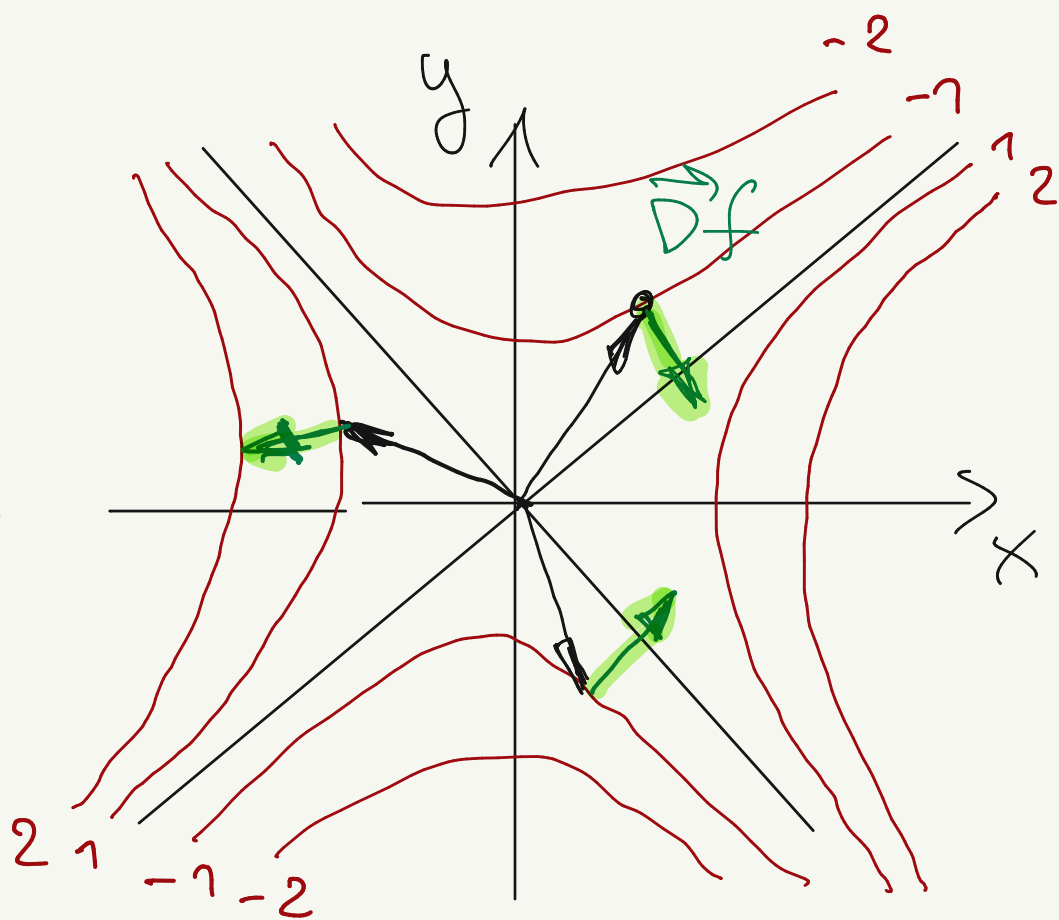
Beispiele



$$f = \frac{1}{4}(x^2 + y^2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{2} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{2}$$

$$\vec{\nabla} f = \frac{1}{2}(x, y) = \frac{1}{2} \vec{r}$$



$$f = \frac{1}{4}(x^2 - y^2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{2} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{y}{2}$$

$$\vec{\nabla} f = \frac{1}{2}(x, -y)$$

- Taylorentwicklung von Funktionen mehrerer Veränderliche

$$f(\vec{r}) \approx f(\vec{r}_0) + \left. \vec{\nabla} f \right|_{\vec{r}_0} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0)$$

Bspl.

$\vec{r} \approx \vec{0}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{a}|} &\approx \frac{1}{|\vec{a}|} + \left. \vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{a}|} \right|_{\vec{r}=\vec{0}} \cdot \vec{r} \\ &= \frac{1}{a} + \frac{1}{a^3} \vec{a} \cdot \vec{r} \end{aligned}$$

II.2 Die Divergenz

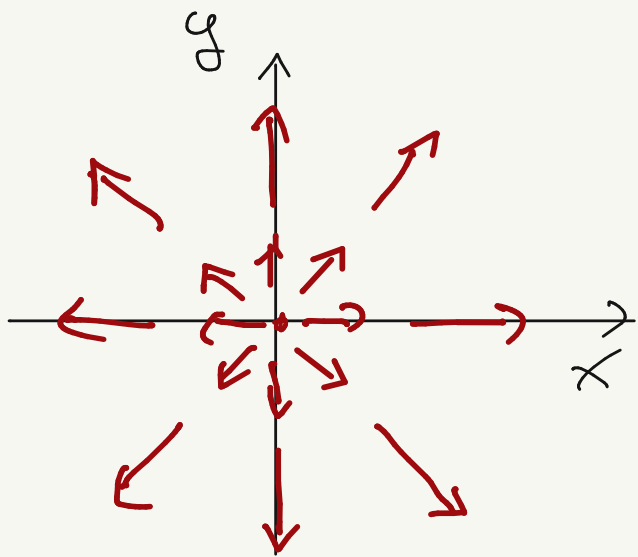
$$\text{grad } f = \vec{\nabla} f$$

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{F} &\equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{F} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} F_x + \frac{\partial}{\partial y} F_y + \frac{\partial}{\partial z} F_z \end{aligned}$$

Bspl:

Quellstärke oder Divergenz von $\vec{F}$

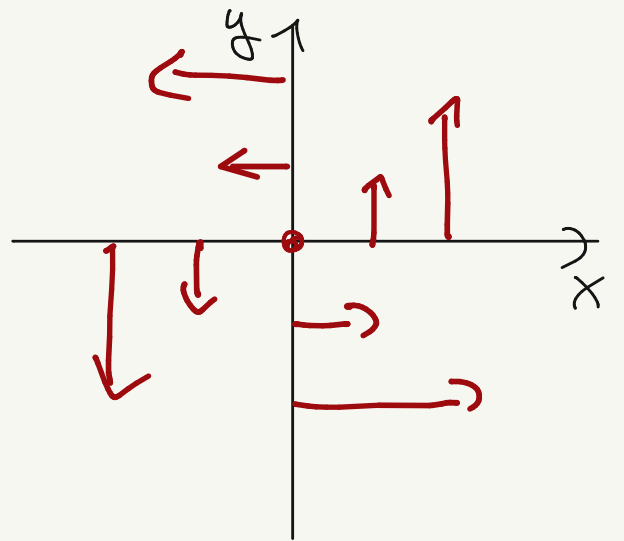
$$\vec{F} = \vec{r}$$



$$\text{div } \vec{r} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3$$

$$\vec{F} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

(hier $\vec{\omega} = \vec{e}_z$)



$$\vec{F} = -y\vec{e}_x + x\vec{e}_y$$

$$\text{div } \vec{F} = \frac{\partial(-y)}{\partial x} + \frac{\partial x}{\partial y} = 0$$

Rechenregeln

$$\text{div}(\vec{A} + \vec{B}) = \text{div } \vec{A} + \text{div } \vec{B}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(g \vec{F}) &= g \operatorname{div} \vec{F} + (\operatorname{grad} g) \cdot \vec{F} \\ &= g \vec{\nabla} \cdot \vec{F} + (\vec{\nabla} g) \cdot \vec{F}\end{aligned}$$

Bew:

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(g \vec{F}) &= \frac{\partial}{\partial x}(g F_x) + \frac{\partial}{\partial y}(g F_y) + \frac{\partial}{\partial z}(g F_z) \\ &= \underbrace{\frac{\partial g}{\partial x} F_x}_{\text{yellow}} + \underbrace{g \frac{\partial F_x}{\partial x}}_{\text{blue}} + \underbrace{\frac{\partial g}{\partial y} F_y}_{\text{yellow}} + \underbrace{g \frac{\partial F_y}{\partial y}}_{\text{blue}} + \underbrace{\frac{\partial g}{\partial z} F_z}_{\text{yellow}} + \underbrace{g \frac{\partial F_z}{\partial z}}_{\text{blue}} \\ &= \underbrace{\vec{\nabla} g \cdot \vec{F}}_{\text{yellow}} + \underbrace{g \vec{\nabla} \cdot \vec{F}}_{\text{blue}} \quad \square\end{aligned}$$

Bsp1: Radialfeld $\vec{F}(\vec{r}) = f(r) \vec{r}$

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{F}(\vec{r}) &= \vec{\nabla} \cdot (f(r) \vec{r}) = \vec{\nabla} f(r) \cdot \vec{r} + f(r) \underbrace{\vec{\nabla} \cdot \vec{r}}_{=3} \\ &= 3f(r) + \vec{r} \cdot \vec{\nabla} f(r)\end{aligned}$$

- Wichtige Kombination aus div und grad

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} f(\vec{r}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} f(\vec{r}) =$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial x^2} f + \frac{\partial^2}{\partial y^2} f + \frac{\partial^2}{\partial z^2} f = \Delta f$$

Laplace Operator

$$\Delta = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

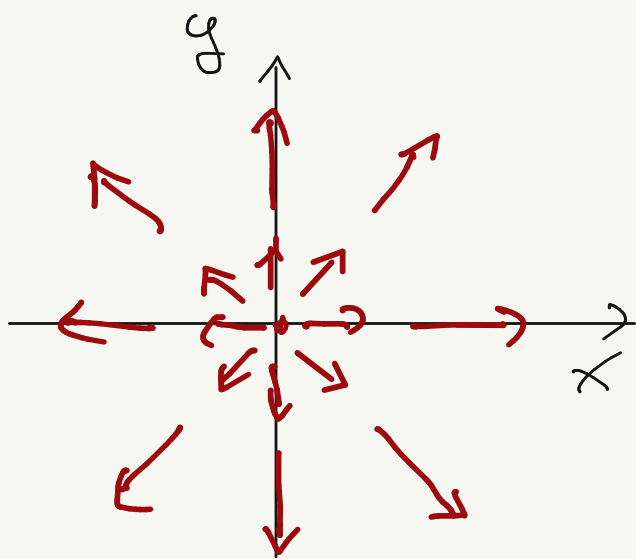
II.3 Rotation

$$\text{rot } \vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F} = \sum_{ijk} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_i} F_j \hat{e}_k$$

$$= \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}, \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}, \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right)$$

Wirbelstärke oder Rotation

Bspl: $\vec{F} = \vec{r}$

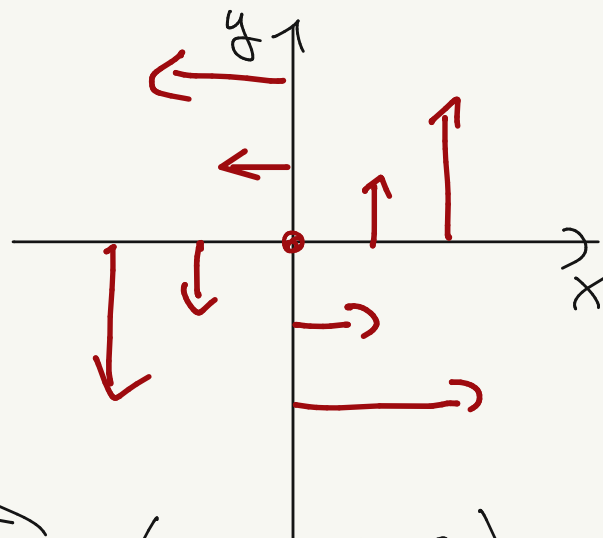


$$\vec{F} = (x, y, z)$$

$$\text{rot } \vec{F} = 0$$

$$\vec{F} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

(hier $\vec{\omega} = \hat{e}_z$)



$$\vec{F} = (-y, x, 0)$$

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{F} &= (0, 0, 1 - (-1)) \\ &= (0, 0, 2) \end{aligned}$$

Rechenregeln

$$\text{rot}(\vec{F} + \vec{G}) = \text{rot } \vec{F} + \text{rot } \vec{G}$$

$$\text{rot}(g \vec{F}) = g \text{rot } \vec{F} + (\vec{\nabla} g) \times \vec{F}$$

Es gelten folgende Regeln:

$$\boxed{\operatorname{div}(\vec{F} \times \vec{G}) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{F} \times \vec{G})}$$

Produktregel der Differenz.
 $\vec{\nabla} = \vec{\nabla}_F + \vec{\nabla}_G$

$$= \vec{G} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}) - \vec{F} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{G})$$

Spätprod.

$$\boxed{= \vec{G} \cdot \operatorname{rot} \vec{F} - \vec{F} \cdot \operatorname{rot} \vec{G}}$$

aufßerdem

(nicht angegeben ist Übungsaufgabe 8)

$$\boxed{\operatorname{rot}(\vec{F} \times \vec{G}) = \vec{\nabla} \times (\vec{F} \times \vec{G})}$$

Produktregel
 $\vec{\nabla} = \vec{\nabla}_F + \vec{\nabla}_G$

$$\begin{aligned} &= \vec{F}(\vec{\nabla} \cdot \vec{G}) - (\vec{F} \cdot \vec{\nabla}_G) \vec{G} \\ &\quad + (\vec{G} \cdot \vec{\nabla}_F) \vec{F} - (\vec{G} \cdot \vec{\nabla}_F) \vec{F} \end{aligned}$$

bac-cab

$$\boxed{= \vec{F}(\vec{\nabla} \cdot \vec{G}) - (\vec{F} \cdot \vec{\nabla}) \vec{G} + (\vec{G} \cdot \vec{\nabla}) \vec{F} - (\vec{G} \cdot \vec{\nabla}) \vec{F}}$$

Ein Gradientenfeld ist wirbelfrei

$$\boxed{\operatorname{rot} \operatorname{grad} f = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} f) = \vec{0}}$$

Ein Wirbelfeld ist quellenfrei

$$\boxed{\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{F} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = 0}$$

Beweis

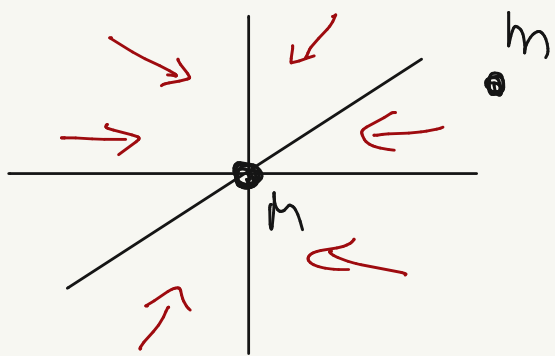
$$\begin{aligned} (a) \quad \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} f) &= \vec{\nabla} \times (\partial_x f, \partial_y f, \partial_z f) \\ &= (\partial_y \partial_z f - \partial_z \partial_y f, \partial_z \partial_x f - \partial_x \partial_z f, \partial_x \partial_y f - \partial_y \partial_x f) \\ &= (0, 0, 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (b) \quad \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}) &= \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}, \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}, \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \\ &= \cancel{\partial_x \partial_y F_z} - \cancel{\partial_x \partial_z F_y} + \cancel{\partial_y \partial_z F_x} - \cancel{\partial_y \partial_x F_z} \\ &\quad + \cancel{\partial_z \partial_x F_y} - \cancel{\partial_z \partial_y F_x} = 0 \end{aligned}$$

□

Beispiele

- Gravitationsfeld einer Punktmasse M



$$\begin{aligned} \vec{F}(\vec{r}) &= - \frac{m M G \vec{r}}{r^3} \\ &= -k \frac{\vec{e}_r}{r^2} = k \vec{\nabla} \frac{1}{r} \end{aligned}$$

$$\vec{F}(\vec{r}) = -k \left(\frac{x}{r^3}, \frac{y}{r^3}, \frac{z}{r^3} \right)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = -k \left(\partial_y \frac{z}{r^3} - \partial_z \frac{y}{r^3}, \partial_z \frac{x}{r^3} - \partial_x \frac{z}{r^3}, \partial_x \frac{y}{r^3} - \partial_y \frac{x}{r^3} \right)$$

$$\partial_y \frac{1}{r^3} = -3 \frac{1}{r^4} \frac{\partial r}{\partial y}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$= -\frac{3}{r^4} \frac{1}{2r} 2y = -\frac{3y}{r^5} \quad \text{etc.}$$

$$\partial_y \frac{z}{r^3} - \partial_z \frac{y}{r^3} = -z \frac{3y}{r^5} + y \frac{3z}{r^5} = 0 \quad \text{etc.}$$

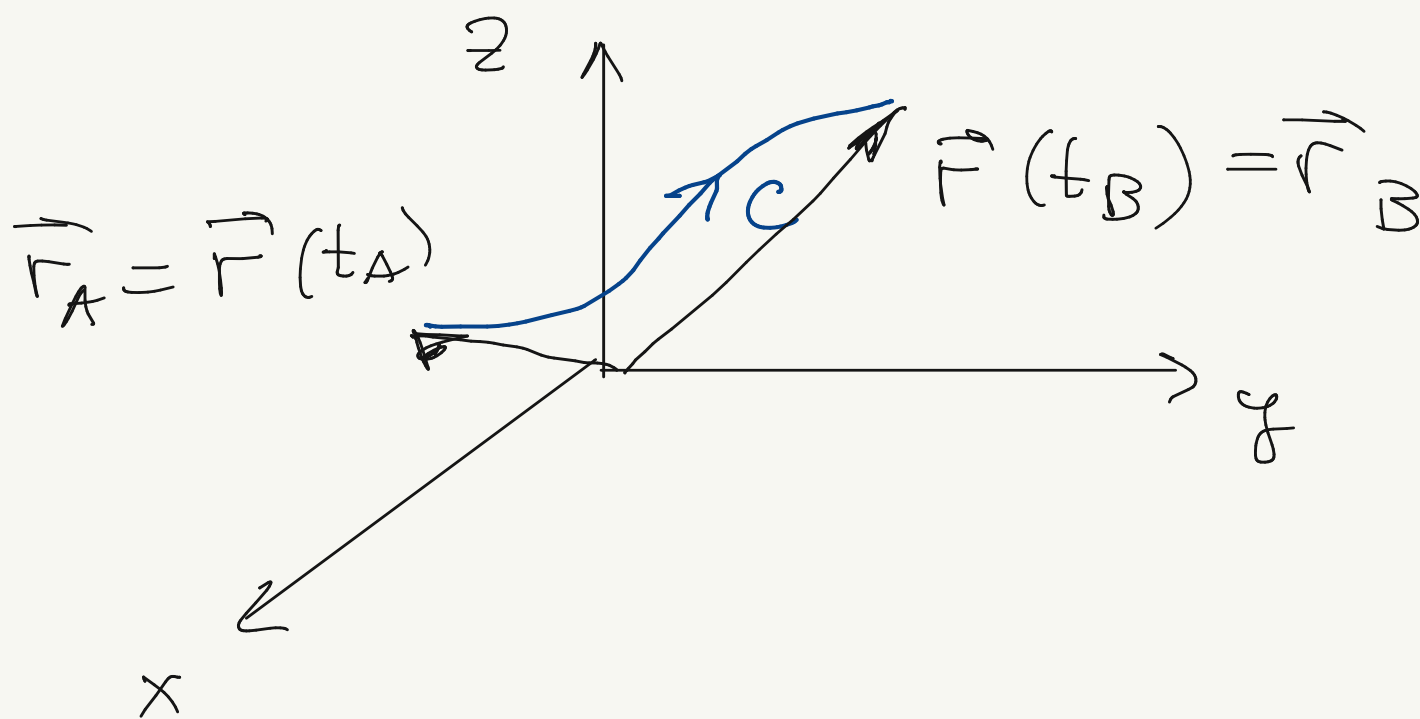
$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$$

II.4 Integrale über Vektorfelder

(A) · Kurvenintegrale von Vektorfeldern

• Kurve: $C = \{ \vec{r}(t) \mid t_A \leq t \leq t_B \}$

Parameter t der die Kurve parametrisiert



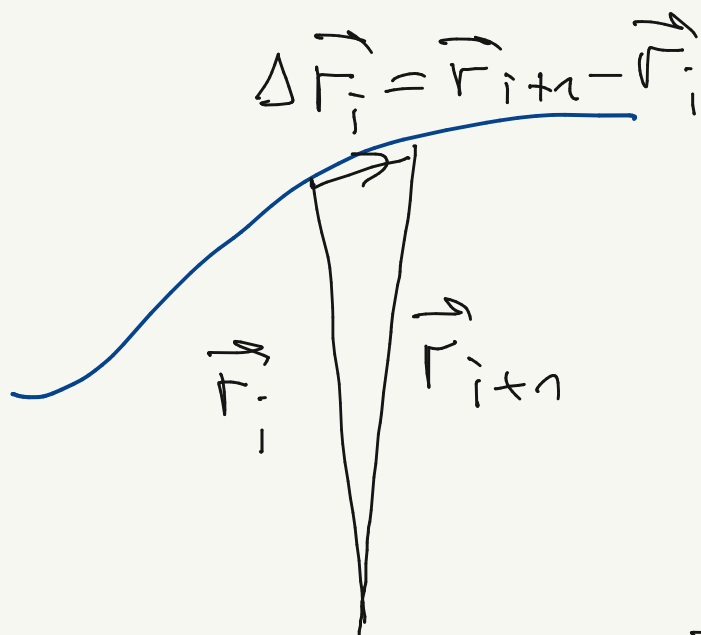
• Vektorfeld $\vec{F}(\vec{r})$

Kurvenintegral

Zähl
weg.
Stückzahl

$$\int_C d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}) \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \vec{F}(\vec{r}_i) \cdot \Delta \vec{r}_i$$

Wobei



mit Parametrisierung $\vec{r} = \vec{r}(t)$

$$\begin{aligned} \int_C d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \vec{F}(\vec{r}_i) \cdot \left. \frac{d\vec{r}}{dt} \right|_{t_i} \Delta t_i \\ &= \int_{t_A}^{t_B} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt \end{aligned}$$

Eigenschaften

(i) $C \rightarrow -C$
($d\vec{r} \rightarrow -d\vec{r}$)

$$\int_C d\vec{r} \cdot \vec{F} = - \int_{-C} d\vec{r} \cdot \vec{F}$$

(ii) $C = C_1 + C_2$



$$\int_C d\vec{r} \cdot \vec{F} = \int_{C_A} d\vec{r} \cdot \vec{F} + \int_{C_B} d\vec{r} \cdot \vec{F}$$

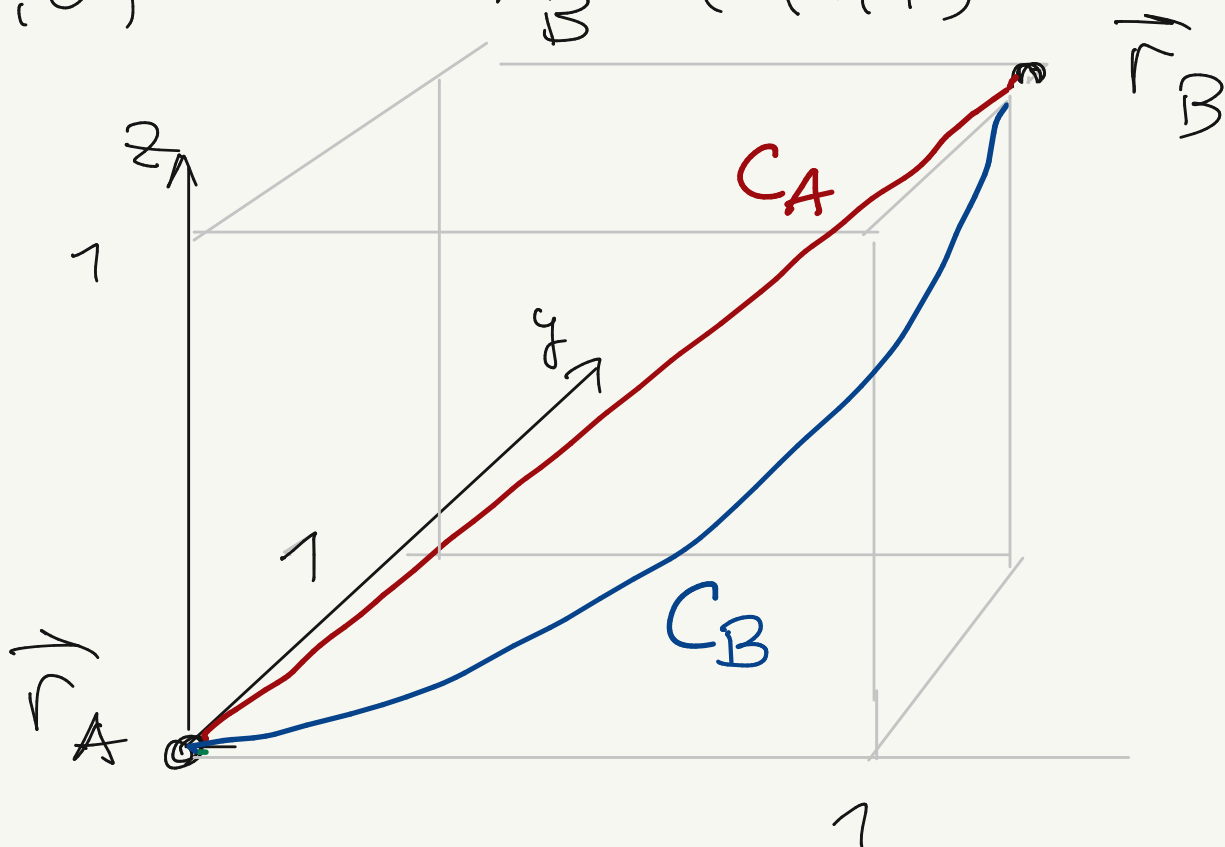
Beispiel:

$$(i) \vec{F}(\vec{r}) = (3x^2 + 6y, -14yz, 20xz^2)$$

$$\vec{r}_A = (0, 0, 0)$$

$$\vec{r}_B = (1, 1, 1)$$

betrachten 3 Wege



$$C_A \quad \vec{r}(t) = (t, t, t)$$

$$d\vec{r}(t) = (1, 1, 1) dt$$

$$t_A = 0, t_B = 1$$

$$I_A = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} d\vec{F} \cdot \vec{F} = \int_0^1 dt (3x^2 + 6y, -14yz, 20xz^2) \cdot (1, 1, 1)$$

$$= \int_0^1 dt (3t^2 + 6t - 14t^2 + 20t^3)$$

$$= t^3 \Big|_0^1 + 3t^2 \Big|_0^1 - \frac{14}{3} t^3 \Big|_0^1 + 5t^4 \Big|_0^1$$

$$= 1 + 3 - \frac{14}{3} + 5 = \frac{13}{3}$$

$$\underline{C_B} \quad \vec{r}(t) = (t, t^2, t^3) \quad d\vec{r} = (1, 2t, 3t^2) dt$$

$$\begin{aligned} I_B &= \int_{C_B} d\vec{r} \cdot \vec{F} = \int_0^1 dt (1, 2t, 3t^2) \cdot (3t^2 + 6t^2, -14t^5, 20t^7) \\ &= \int_0^1 dt (9t^2 - 28t^6 + 60t^9) = \left. \frac{9}{3}t^3 - \frac{28}{7}t^7 + \frac{60}{10}t^{10} \right|_0^1 \\ &= 1 - \frac{28}{7} + 6 = \underline{\underline{5}} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Integral hängt i.A. von Weg ab

(ii) $\bullet$ jetzt

$$\vec{F}(\vec{r}) = (2x^2 + 2xy + 2xz^2, x^2, 2x^2z)$$

$\underline{C_A}$

$$\vec{r} = (t, t, t)$$

$$\begin{aligned} I_A &= \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} d\vec{r} \cdot \vec{F} = \int_0^1 dt (1, 1, 1) \cdot (2t^2 + 2t^2 + 2t^3, t^2, 2t^3) \\ &= \int_0^1 dt (4t^2 + 2t^3 + t^2 + 2t^3) = \int_0^1 dt (5t^2 + 4t^3) = \underline{\underline{\frac{8}{3}}} \end{aligned}$$

$\underline{C_B}$

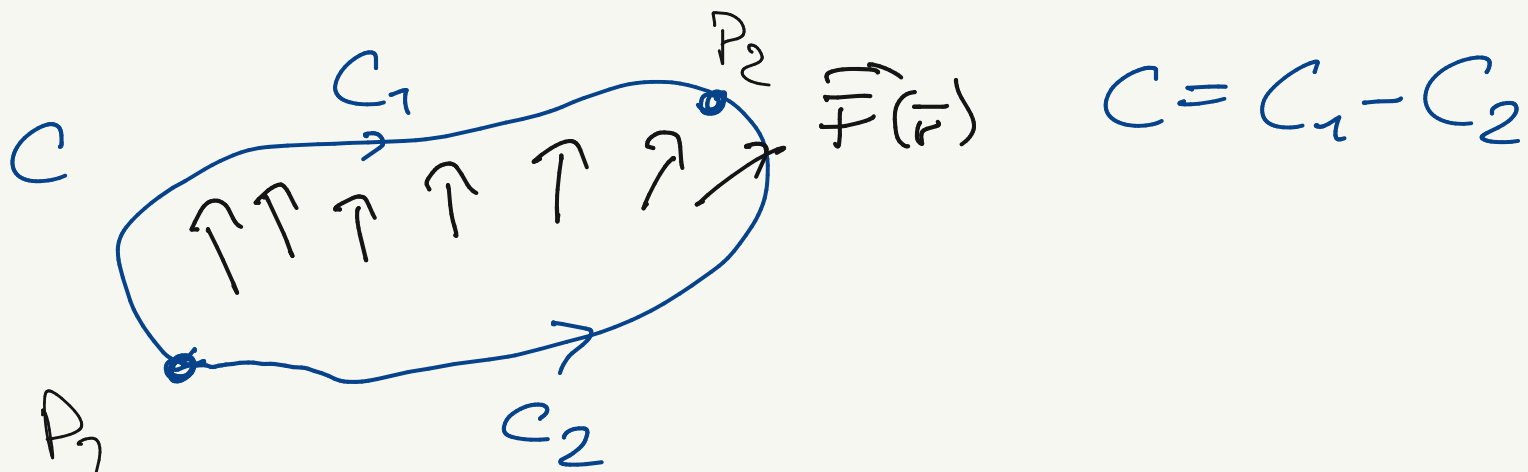
$$\vec{r} = (t, t^2, t^3) \quad d\vec{r} = (1, 2t, 3t^2) dt$$

$$\begin{aligned} I_B &= \int_0^1 dt (1, 2t, 3t^2) \cdot (\underline{2t^2 + 2t^3 + 2t^7}, \underline{t^2}, \underline{2t^5}) \\ &= \int_0^1 dt (2t^2 + 2t^3 + 2t^7 + \underline{2t^3} + 6t^7) \quad ! \quad (=) \\ &= \int_0^1 dt (2t^2 + 4t^3 + 8t^7) = \underline{\underline{\frac{8}{3}}} \end{aligned}$$

Integrale sind jetzt gleich! da steckt was dahinter!

Wegunabhängigkeit von Kurvenintegralen

Def: Zirkulation: Kurvenintegral über geschlossene Kurve C



$$\oint_C d\vec{r} \cdot \vec{F} = \int_{C_1} d\vec{r} \cdot \vec{F} - \int_{C_2} d\vec{r} \cdot \vec{F}$$

Ein Kurvenintegral einer Vektorfunktion ist wegunabhängig (in einem Gebiet $\subset \mathbb{R}^3$) falls die Zirkulation über alle geschlossenen Pfade innerhalb des Gebietes verschwindet.

Komponentendarstellung $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$ $d\vec{r} = (dx, dy, dz)$

$$\vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

Def: Ein Ausdruck

$$u(x, y, z) dx + v(x, y, z) dy + w(x, y, z) dz$$

heißt vollständiges Differential einer Funktion $f(x, y, z)$, falls gilt

$$u = \frac{\partial f}{\partial x}$$

$$v = \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$w = \frac{\partial f}{\partial z}$$

Dann gilt

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = df$$

• notwendige Bedingung (Satz von Schwarz)

$$(*) \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{etc.}$$

Man sieht

$$(1) \quad df = \vec{\nabla} f \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$(2) \quad \int_C d\vec{r} \cdot \vec{F} = \int_{f(\vec{r}_A)}^{f(\vec{r}_B)} df = f(\vec{r}_B) - f(\vec{r}_A)$$

$$\Rightarrow \oint d\vec{r} \cdot \vec{F} = \oint d\vec{r} \cdot \vec{\nabla} f = \oint df = 0$$

Für ein Gradientenfeld $\vec{F} = \vec{\nabla} f$ ist das Kurvenintegral
wegunabhängig. Die Zirkulation verschwindet

Die notwendige Bedingung (*) kann auch wie folgt umgeschrieben werden $u = F_x, v = F_y, w = F_z$

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x} \quad \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y} \quad \frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x}$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$$

$$\oint d\vec{r} \cdot \vec{F} = 0 \Leftrightarrow \vec{F} \cdot d\vec{r} = df \Leftrightarrow \vec{F} = \vec{\nabla} f \Leftrightarrow \vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$$

totales Diff.

man erinnert sich
wir hatten gesehen $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} f) = 0$

Beispiel von oben (ii) $\vec{F} = (\underbrace{2x^2 + 2xy + 2xz^2}_u, \underbrace{x^2}_v, \underbrace{2x^2z}_w)$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2x = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 4xz = \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} = 0 = \frac{\partial w}{\partial y}$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$$

$$\vec{F} = \vec{\nabla} f$$

$$f = \frac{2}{3}x^3 + x^2y + x^2z^2 + c$$

$$(i) \vec{F} = (\underbrace{3x^2 + 6y}_u, \underbrace{-14yz}_v, \underbrace{20xz^2}_w)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 6 \neq \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \downarrow$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} \neq 0$$

(B) Flächen- und Volumenintegrale skalare Fkt.

(C) Oberflächenintegrale vektorieller Funktionen

das machen wir später
in Vektoranalysis II

→ jetzt erst mal zur Physik

III. Mechanik des Massenpunktes I

III.1. Newtonsche Axiome

lex prima (1. Newtonsche Axiome)

Es gibt Koordinatensysteme in denen ein kräftefreier Körper (Massenpunkt) im Zustand der Ruhe oder der geradlinig, gleichförmigen Bewegung verharnt. Solche Systeme heißen Inertialsysteme

- Wenn Σ ein Inertialsystem ist, so ist jedes System Σ' welches sich relativ zu Σ mit konstanter Geschwindigkeit $\vec{u}$ bewegt ebenfalls ein Inertialsystem