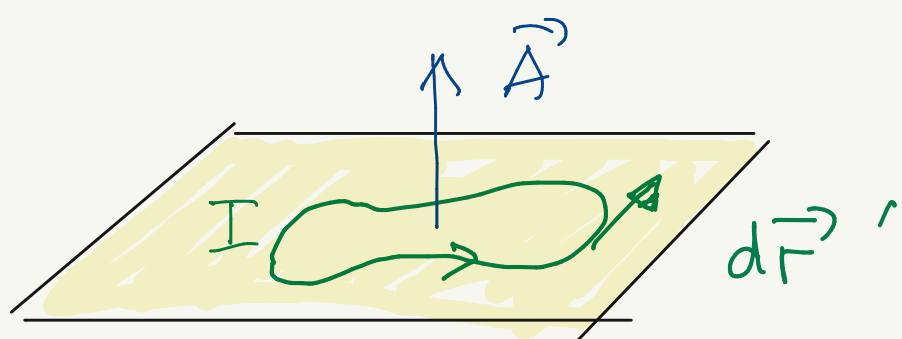


Bspl: magnetisches Dipolmoment eines geschlossenen Leiterschleifens in der (x, y) Ebene



$$\vec{m} = \frac{I}{2} \oint_{\partial(A)} \vec{r}' \times d\vec{r}' = \underline{\underline{I \vec{A}}}$$

XVI Partielle Differentialgleichungen -

Übungen - 1

Wir hatten in der Elektrodynamik zum ersten Mal lineare partielle Differentialgleichungen als Grundgleichungen kennengelernt, z.B.

$$\Delta \phi = -\rho / \epsilon_0$$

$$\Delta \vec{A} = \mu_0 \vec{j}$$

Weitere wichtige Gleichungen der Physik, die solche partiellen DGL sind, sind z.B.

$$\Delta \phi = -k^2 \phi$$

Helmholtzgleichung

$$\Delta \phi = \frac{1}{D} \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

Diffusionsgleichung

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \phi + V \phi = i \hbar \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

Schrödingergleichung

$$\Delta \phi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}$$

Wellengleichung

XVI.1 Separation

Das erste Lösungsverfahren für lineare partielle DGL das wir besprechen wollen ist der Separationsansatz:

- lineare DGL $\rightarrow$ Superpositionsprinzip

$\Rightarrow$ versuchen spezielle Lösungen zu finden
um allgemeine Lösung als Superposition
dieser darzustellen

partielle DGL $\xrightarrow{\text{Separationsansatz}}$ gewöhnliche DGL

$$\phi(\vec{r}) = \phi(q_1, q_2, q_3) = A(q_1)B(q_2)C(q_3)$$

Wahl der Koordinaten ist problemabhängig

(A) Separation in kartesischen Koordinaten

Im Folgenden betrachten wir die Laplace Gleichung
 $\Delta\phi = 0$ als Beispiel

$$\phi(\vec{r}) = X(x)Y(y)Z(z)$$

$$\Delta\phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0$$

für $\phi \neq 0$

$$\phi = XYZ$$

$$\frac{1}{\phi} \Delta \phi = \underbrace{\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2}}_{\text{nur Funktion von } x} + \underbrace{\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2}}_{\text{nur Funktion von } y} + \underbrace{\frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2}}_{\text{nur Funktion von } z} = 0$$

Damit für jedes (x, y, z) die Gleichung erfüllt ist
müssen alle drei Terme konstant sein!

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -\alpha^2 \quad \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = -\beta^2$$

$$\frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = \gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2$$

$$\Rightarrow X = e^{\pm i\alpha x}$$

$$Y = e^{\pm i\beta y}$$

$$Z = e^{\pm \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} z}$$

$\Rightarrow$ Lösung mit 2 Parametern: α, β

$$\phi_{\alpha\beta} = e^{\pm i\alpha x} e^{\pm i\beta y} e^{\pm \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} z}$$

Wir werden später diskutieren, daß die Funktionen

$$\{\phi_{\alpha\beta}(x,y,z)\}$$

ein vollständiges Orthogonalsystem im linearen Raum der Funktionen darstellt und damit läßt sich jede Lösung darstellen durch

$$\phi(x,y,z) = \sum_{\alpha,\beta} C_{\alpha\beta} \phi_{\alpha\beta}(x,y,z)$$

• 1-dimensionale Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}$$

Separationsansatz: $\phi(x,t) = X(x)T(t)$

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = \frac{1}{c^2 T} \frac{d^2 T}{dt^2}$$

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + k^2 X = 0$$

$$\frac{d^2 T}{dt^2} + c^2 k^2 T = 0$$

$$X(x) = e^{\pm i k x}$$

$$T(t) = e^{\pm i c k t}$$

damit

$$\phi_k(x, t) = e^{\pm i(kx \pm \omega t)} = \begin{cases} \cos(kx \pm \omega t) \\ \sin(kx \pm \omega t) \end{cases}$$

ebene Wellen

konstante Phase: $kx \pm \omega t = \text{const}$

$$\Rightarrow x \pm ct = \text{const}$$

$$x = +ct + x_0$$

$$x = -ct + x_0$$

Welle in $+x$ Richtung

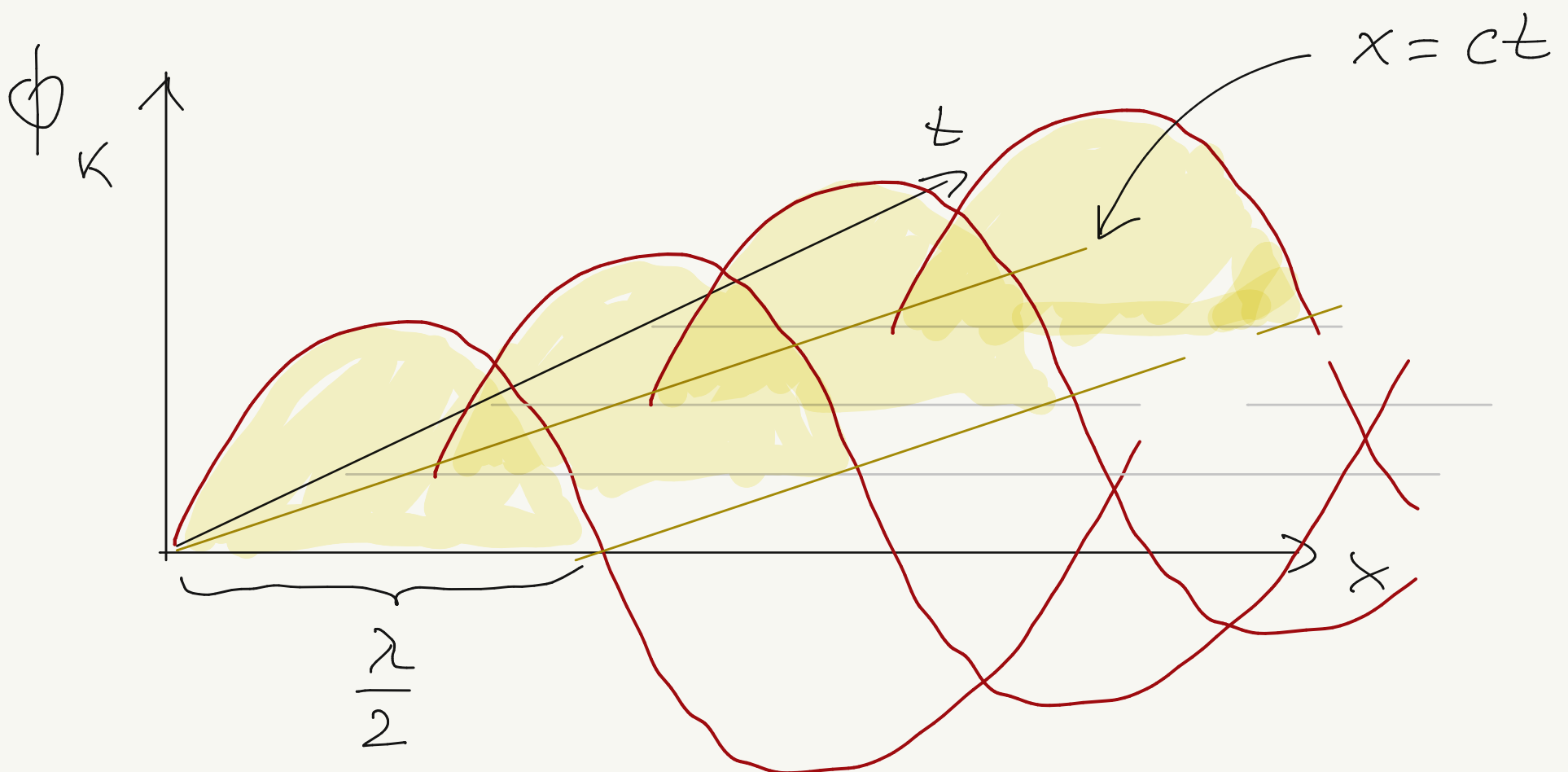
Welle in $-x$ Richtung

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Wellenzahl

λ Wellenlänge

$$\omega = 2\pi f \quad \text{Frequenz}$$



(B) Separation in Kugelkoordinaten ^{↓ Zusatzvideo} *

In Kugelkoordinaten lautet der Laplaceoperator

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

Bem: (i) $\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2}$ r

(ii) $\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} = \frac{\partial}{\partial x} (1-x^2) \frac{\partial}{\partial x}$

mit x = cos \vartheta

Separationsansatz

$$\phi(r, \vartheta, \varphi) = \frac{U(r)}{r} P(\cos \vartheta) Q(\varphi)$$

damit

$$\Delta \phi = \frac{PQ}{r} \frac{d^2 U}{dr^2} + \frac{UQ}{r^3} \frac{d}{dx} (1-x^2) \frac{dP(x)}{dx}$$

$$+ \frac{UP}{r^3 (1-x^2)} \frac{d^2 Q}{d\varphi^2} = 0$$

$$\frac{r^3 (1-x^2)}{UPQ} \Bigg|$$

$$\Rightarrow$$

$$0 = \underbrace{\frac{r^2(1-x^2)}{2l} \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{(1-x^2)}{P} \frac{d}{dx} (1-x^2) \frac{dP}{dx}}_{\text{nur von } x \text{ und } r \text{ abhängig}} + \underbrace{\frac{1}{Q} \frac{d^2 Q}{d\varphi^2}}_{\text{nur von } \varphi \text{ abhängig}} = -m^2$$

(*)

das liefert

$$Q''(\varphi) + m^2 Q(\varphi) = 0$$

$$Q_m(\varphi) = e^{im\varphi}$$

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

$$\text{Da } Q(\varphi + 2m\pi) = Q(\varphi) \quad \uparrow$$

Dann aus (*)

$$\underbrace{\frac{r^2}{2l} \frac{d^2 u}{dr^2}}_{\text{nur von } r} + \underbrace{\frac{1}{P} \frac{d}{dx} (1-x^2) \frac{dP}{dx} - \frac{m^2}{(1-x^2)}}_{\text{nur von } x \text{ abhängig}} = 0$$

$$= \underline{l(l+1)}$$

$$u'' - \frac{l(l+1)}{r^2} u = 0$$

$\Rightarrow$

$$u_l(r) = A r^{l+1} + B r^{-l}$$

- Was noch bleibt ist die DGL für $P(x) = P(\cos \theta)$

$$\frac{d}{dx} (1-x^2) \frac{dP}{dx} + \left[\ell(\ell+1) - \frac{m^2}{(1-x^2)} \right] P = 0$$

zugeordnete Legendre'sche DGL

$m=0$ Legendre Differentialgleichung

liegt keine Abhängigkeit von φ vor, reicht es den Fall $m=0$ zu betrachten.

$$(1-x^2) P'' - 2x P' + \ell(\ell+1) P = 0$$

Lösungen sind Legendre Polynome

$$P_\ell(x) = \frac{1}{2^\ell \ell!} \frac{d^\ell}{dx^\ell} (x^2-1)^\ell$$

- Polynome ℓ 'ten Grades

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = x$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2} (3x^2 - 1)$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2} (5x^3 - 3x)$$

$\vdots$

gerade in x

$\vdots$

ungerade in x

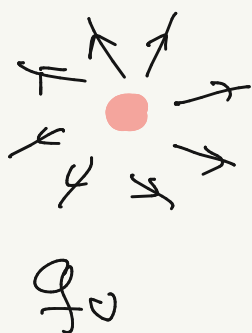
► für axialsymmetrische Probleme kann das elektrostatische Potential im Außenraum von Ladungen geschrieben werden als

$$\phi(r, \vartheta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left[A_{\ell} r^{\ell} + B_{\ell} r^{-(\ell+1)} \right] P_{\ell}(\cos \vartheta)$$

Axialsymmetrie = keine Abhängigkeit von φ
 $\Rightarrow m=0$

Beispiel

• Monopol

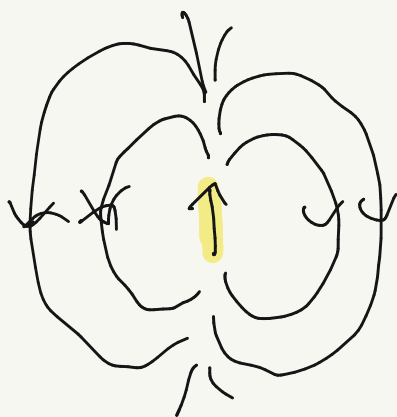


$$\phi = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 r}$$

$$A_{\ell} \equiv 0$$

$$B_0 = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0} \quad B_{\ell>0} = 0$$

• Punktdipol

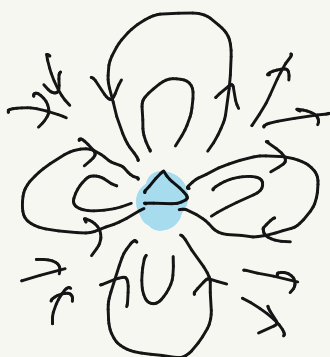


$$\phi = \frac{p \cos \vartheta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$A_{\ell} \equiv 0$$

$$B_0 = 0, \quad B_1 = \frac{p}{4\pi\epsilon_0}, \quad B_{\ell>1} = 0$$

• Punktsquadrupol



$$A_{\ell} \equiv 0$$

$$B_0 = B_1 = 0$$

$$B_2 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}, \quad B_{\ell>2} \equiv 0$$

$m \neq 0$ Kugelflächenfunktionen

Lösungen für $P(x)$:

$$P_e^m(x) = (-1)^m (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} P_e(x)$$

zugeordnete Legendrefunktion

Die kombinierte Lösung $P(\cos\theta)Q(\varphi)$ sind die

$$Y_{em}(\vartheta, \varphi) = \left[\frac{2\ell+1}{4\pi} \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!} \right]^{1/2} P_e^m(\cos\theta) e^{im\varphi}$$

Kugelflächenfunktionen

$\uparrow$ Zuschvideo

XVI. 2 Lösung durch

Fouriertransformation

$\rightarrow$ siehe F-Transf