

XV. Magnetostatik

XV.1 Magnetisches Feld einer Stromverteilung im unendlich ausgedehnten Raum

(A) Grundgleichungen

Die Grundgleichungen der Magnetostatik ($\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow 0$)
waren

(*)	$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$	Ladungserhaltung
	$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$	keine magnet. Ladungen
	$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$	Ampere

Vektorpotential

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

Eichfreiheit

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} \lambda$$

In der Magnetostatik bietet sich eine spezielle Wahl der Eichfunktion λ an, d.h. eine Wahl der Eichung

$$(*) \Rightarrow \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \Delta \vec{A} = \mu_0 \vec{j}$$

Nun fordern wir

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$$

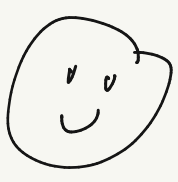
Coulomb-
Equation

Dies liefert für $\vec{A}$ eine vektorielle Poisson-
gleichung

(*)

$$\Delta \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}$$

d.h. $\Delta A_x = -\mu_0 j_x$ $\Delta A_y = -\mu_0 j_y$ $\Delta A_z = -\mu_0 j_z$

$\Rightarrow$ weitgehende Analogie wie 
Elektrostatik

(B) Biot-Savart Gesetz

analog zur Elektrostatik können wir die drei
Poissonsgleichungen (vektorielle Poissonsgleichung)
lösen durch

(**)

$$\vec{A}(\vec{r}) = \int dV' \frac{\mu_0 \vec{j}(\vec{r}')}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Bem: • Da $\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0 \Rightarrow$ keine magnetischen
Monopollösungen

• (**) erfüllt Coulombgleichung $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$

• magnetisches Feld $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$

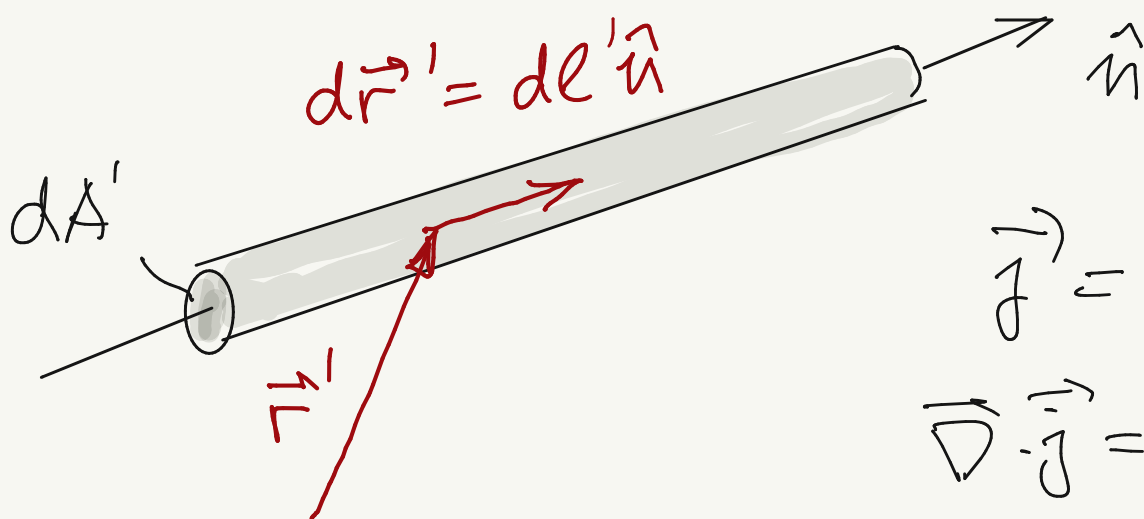
$$\vec{B}(\vec{r}) = \int dV' \vec{\nabla} \times \frac{\mu_0 \vec{j}(\vec{r}')}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int dV' \left(\vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \times \vec{j}(\vec{r}')$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int dV' \vec{j}(\vec{r}') \times \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

Biot-Savart Gesetz

• dünner stromdurchflossener Leiter



$$\vec{j} = j \hat{n}$$

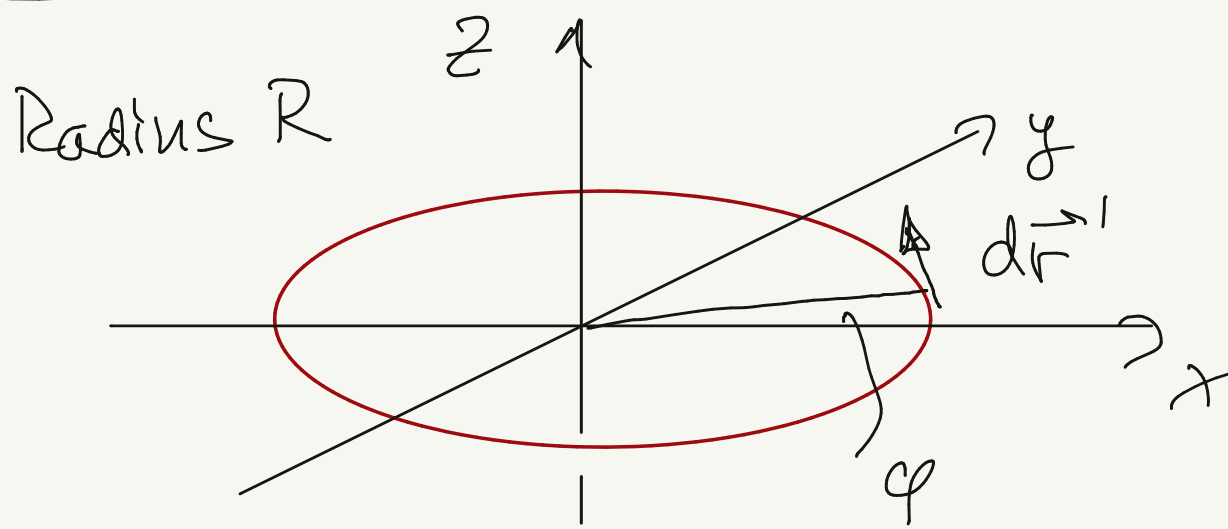
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0 \Rightarrow I = \text{konst}$$

$$\iiint \vec{j} dV' = \iiint \underline{dA'} \underline{dl'} \underline{j(r')} \underline{\hat{n}} = \int \underline{d\vec{r}'} \underline{I(r')}$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int d\vec{r}' \times \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

Magnetfeld dünner stromdurchflossener Leiter

Beispiel: Kreisstrom $\rightarrow \vec{B}$ auf z Achse?



$$\vec{r} = z \vec{e}_z$$

$$\vec{r}' = R(\cos\varphi, \sin\varphi, 0)$$

$$d\vec{r}' = R(-\sin\varphi, \cos\varphi, 0) d\varphi$$

$$d\vec{r}' \times (\vec{r} - \vec{r}') = (Rz \cos\varphi, Rz \sin\varphi, R^2) d\varphi$$

	↓	↓	↓
nach Integration $d\varphi = \{0, 2\pi\}$	0	0	$2\pi R^2$

$$\vec{B}(0,0,z) = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \vec{e}_z$$

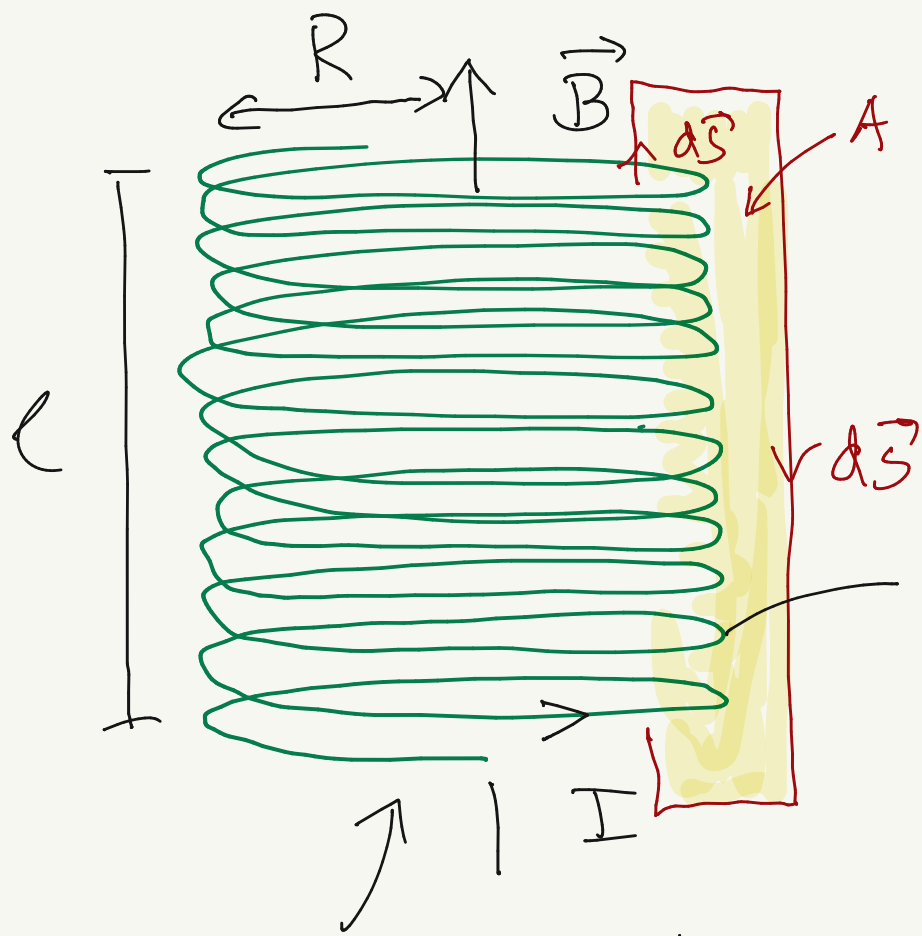
(C) Integrale Form des Ampere'schen Gesetzes

In der Elektrostatik hatten wir gesehen, daß man bei hochgradig symmetrischen Problemen die Maxwellgleichungen direkt integrieren kann. Dies ist hier auch möglich

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

$$\int_A d\vec{A} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{B} = \oint_{\partial(A)} d\vec{s} \cdot \vec{B} = \mu_0 I$$

Bspl: (∞) lange Spule



$$l \gg R$$

$$\oint_{(A)} d\vec{S} \cdot \vec{B} = B_I l = \mu_0 I N$$

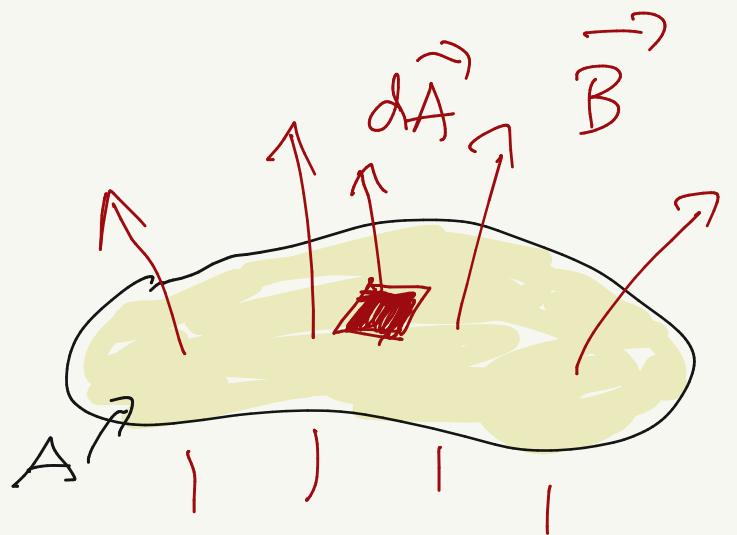
N Windungen auf Länge l

$$B_I = \frac{\mu_0 I N}{l} \hat{e}_z$$

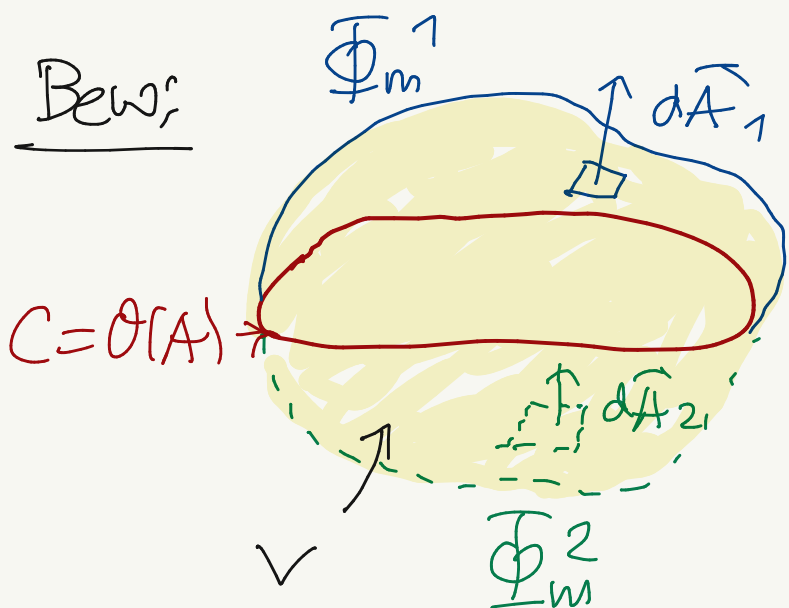
homogener Feld
im Innern $\vec{B} = B_I \hat{e}_z$

• magnetischer Fluß

$$\Phi_m = \int_A d\vec{A} \cdot \vec{B}$$



Der magnetische Fluß ist für alle Flächen A
mit derselben Randkurve $C = \partial(A)$ derselbe



$$\Phi_m^1 - \Phi_m^2 = \int_{A_1} d\vec{A}_1 \cdot \vec{B} - \int_{A_2} d\vec{A}_2 \cdot \vec{B}$$

$$= \int_{\partial(V)} d\vec{A} \cdot \vec{B} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$\square(V)$

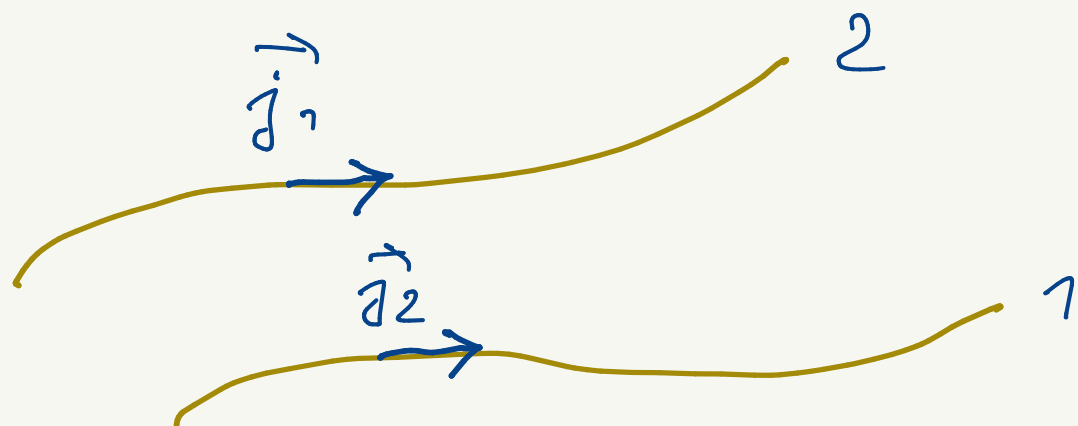
$\checkmark$

$\square$

(D) Kraft zwischen Stromdurchflossenen Leitern

Kraftdichte

$$\vec{f} = \vec{j} \times \vec{B}$$



Kraft auf Leiter 2

$$\vec{F}_2 = \int dV_2 \vec{j}_2(\vec{r}_2) \times \vec{B}_1(\vec{r}_2)$$

Magnetfeld durch $\vec{j}_1$
am Ort des
Leiters 2

$$= \int dV_2 \int dV_1 \vec{j}_2(\vec{r}_2) \times \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \vec{\nabla}_2 \frac{1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} \times \vec{j}_1(\vec{r}_1) \right)$$

Biot-Savart

doppeltes Kreuzprodukt

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int dV_1 \int dV_2 \vec{j}_2(\vec{r}_2) \cdot \vec{j}_1(\vec{r}_1) \vec{\nabla}_2 \frac{1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}$$

$$- \frac{\mu_0}{4\pi} \int dV_1 \int dV_2 \left[\left(\vec{\nabla}_2 \frac{1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} \right) \cdot \vec{j}_2(\vec{r}_2) \right] \vec{j}_1(\vec{r}_1)$$

$= 0^*$

* denn:

$$\int dV_2 \left(\vec{\nabla}_2 \frac{1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} \right) \cdot \vec{j}_2(\vec{r}_2) = - \int dV_2 \frac{1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} \underbrace{\vec{\nabla}_2 \cdot \vec{j}_2(\vec{r}_2)}_{\substack{\text{par.} \\ \text{Zahl.}}} = 0 \quad \square$$

$\Rightarrow$

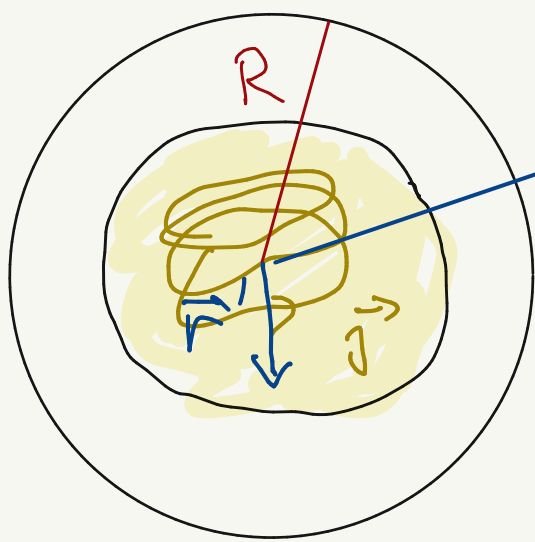
$$\vec{F}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \int dV_1 \int dV_2 \vec{j}_1(\vec{r}_1) \cdot \vec{j}_2(\vec{r}_2) \frac{(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}$$

speziell für stromdurchflossene dünne Leiter:

$$\vec{F}_2 = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \iint d\vec{r}_1 \cdot d\vec{r}_2 \frac{(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}$$

($d\vec{r}$: Richtung des Stromflusses)

XV. 2 Magnetische Multipole



Feld / Vektorpotential
im Außenraum

$$|\vec{r}| \gg R > |\vec{r}'|$$

räumlich lokalisierte
Stromverteilung

wie in Elektrodynamik
Taylorreihenentwicklung von

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int dV' \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \approx \frac{1}{r} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^3} + \dots$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \underbrace{\frac{1}{r} \int dV' \vec{j}(\vec{r}')}_{\text{magnetisches Monopolfeld} = 0} + \underbrace{\frac{\vec{r}}{r^3} \cdot \int dV' \vec{r}' \vec{j}(\vec{r}') + \dots}_{\text{magnet. Dipolfeld}} \right\}$$

nach etwas längerer Rechnung findet man

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3} + \dots$$

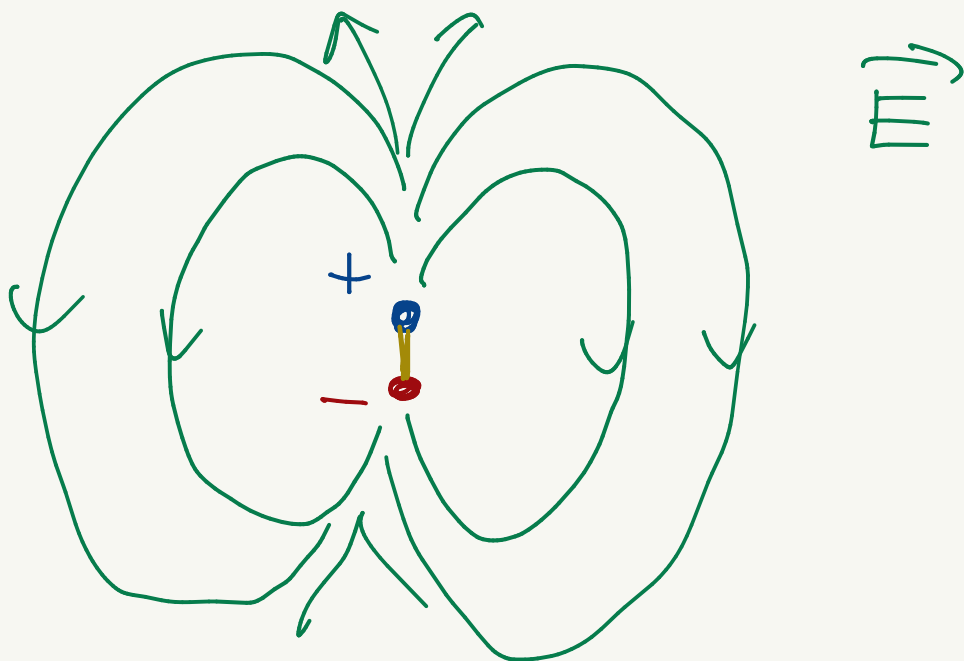
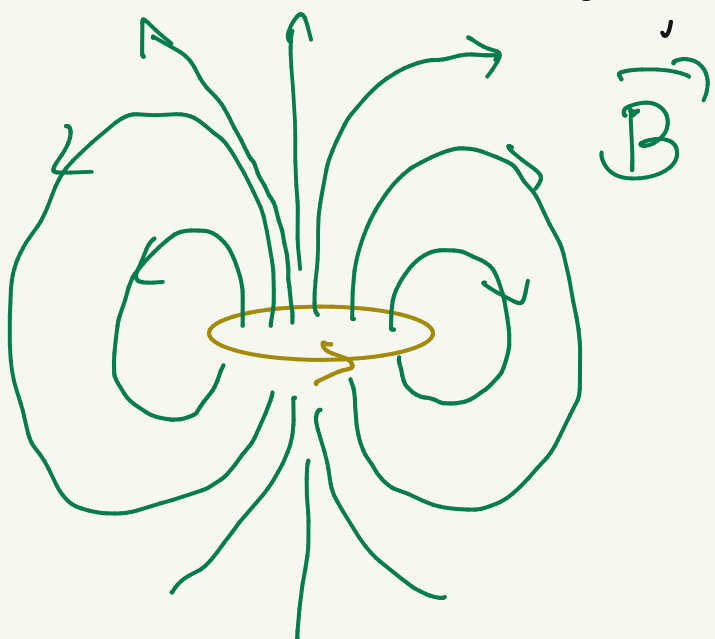
$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3\vec{r}(\vec{m} \cdot \vec{r}) - \vec{m} r^2}{r^5} + \dots$$

magnetische Dipolfeld (analog zu elektr. Dipol mit $\vec{p} \rightarrow \vec{m}$)

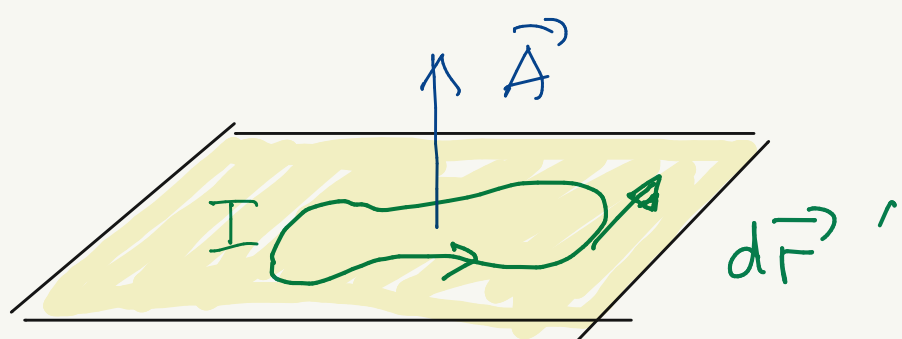
wobei

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \int dV' (\vec{r}' \times \vec{j}(\vec{r}'))$$

magnetisches Dipolmoment



Bspl: magnetisches Dipolmoment eines geschlossenen Leiterschleifens in der (x, y) Ebene



$$\vec{m} = \frac{I}{2} \oint_{\partial(A)} \vec{r}' \times d\vec{r}'$$

$$= \underline{\underline{I \vec{A}}}$$

XVI Partielle Differentialgleichungen -

Übungen - 1

Wir hatten in der Elektrodynamik zum ersten Mal lineare partielle Differentialgleichungen als Grundgleichungen kennengelernt, z.B.

$$\Delta \phi = -\rho / \epsilon_0$$

$$\Delta \vec{A} = \mu_0 \vec{j}$$

Weitere wichtige Gleichungen der Physik, die solche partiellen DGL sind, sind z.B.

$$\Delta \phi = -k^2 \phi$$

Helmholtzgleichung

$$\Delta \phi = \frac{1}{D} \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

Diffusionsgleichung

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \phi + V\phi = i\hbar \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

Schrodingergleichung

$$\Delta \phi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}$$

Wellengleichung