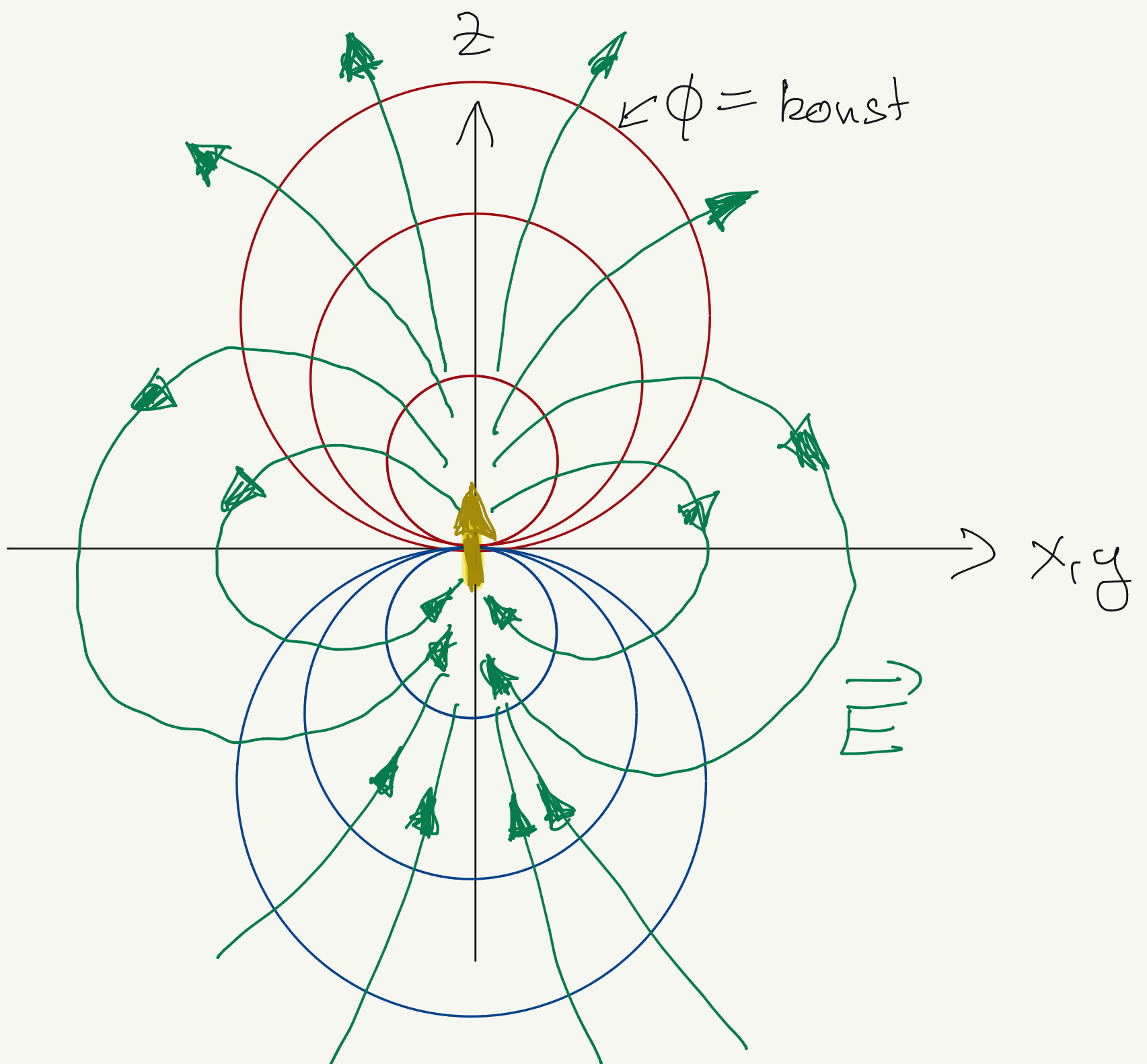




Potential und elektrisches Feld eines Punktdipols $\vec{p} = p \vec{e}_z$

(C) Kraft auf eine Ladungsverteilung

Betrachten Ladungsverteilung $g(\vec{r})$ in externem elektrischen Feld $\vec{E}_{\text{ext}}$

$$\vec{F} = \int dV g(\vec{r}) \vec{E}_{\text{ext}}$$

Betrachten:

$$(*) \quad g(\vec{r}) = q \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_0) - \vec{p} \cdot \vec{\nabla} \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_0) + \dots$$

Punktladung

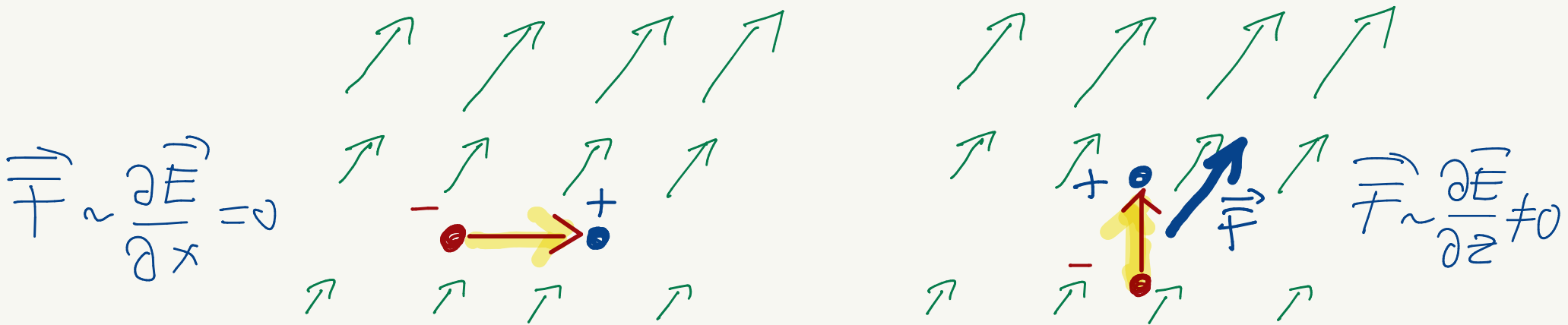
Punktdipol

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \vec{F} &= q \vec{E}_{\text{ext}}(\vec{r}_0) - \vec{p} \cdot \int dV \left(\vec{\nabla} \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_0) \right) \vec{E}_{\text{ext}}(\vec{r}) \\ &= q \vec{E}_{\text{ext}}(\vec{r}_0) + \int dV \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_0) (\vec{p} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E}_{\text{ext}}(\vec{r}) \end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{F} = q \vec{E}_{\text{ext}}(\vec{r}_0) + (\vec{p} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E}_{\text{ext}}(\vec{r}_0)}$$

Richtungsableitung in Richtung $\vec{p}$



$$\vec{p} = p \hat{e}_x$$

$$\vec{p} \cdot \vec{\nabla} = p \frac{\partial}{\partial x}$$

umgekehrt gleich große Kräfte auf "+" und "-"

$$\vec{p} = p \hat{e}_z$$

$$\vec{p} \cdot \vec{\nabla} = p \frac{\partial}{\partial z}$$

Kraft auf "+" ist stärker als auf "-"

Aus dem Beispiel oben wird ersichtlich, daß auch ein Drehmoment auf den Dipol wirkt

$$\vec{M} = \int dV g(\vec{r}) (\vec{r} \times \vec{E}_{\text{ext}}(\vec{r}))$$

Mit Ladungsverteilung (*) und $\vec{r}_0 = 0$

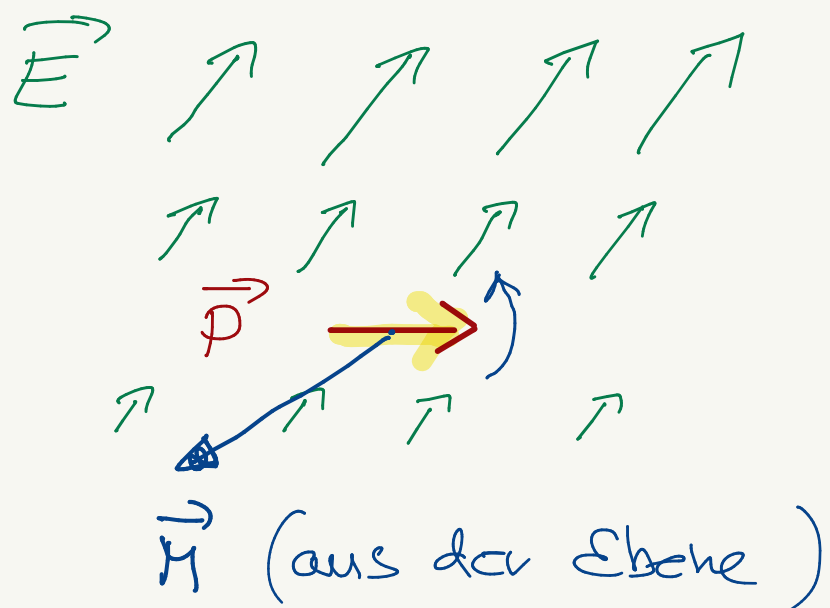
$$\vec{M} = \int dV \left(q \delta^{(3)}(\vec{r}) - \vec{p} \cdot \vec{\nabla} \delta^{(3)}(\vec{r}) \right) (\vec{r} \times \vec{E}_{\text{ext}}(\vec{r}))$$

↑ ↑
= 0

$$\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E}_{\text{ext}}(0)$$

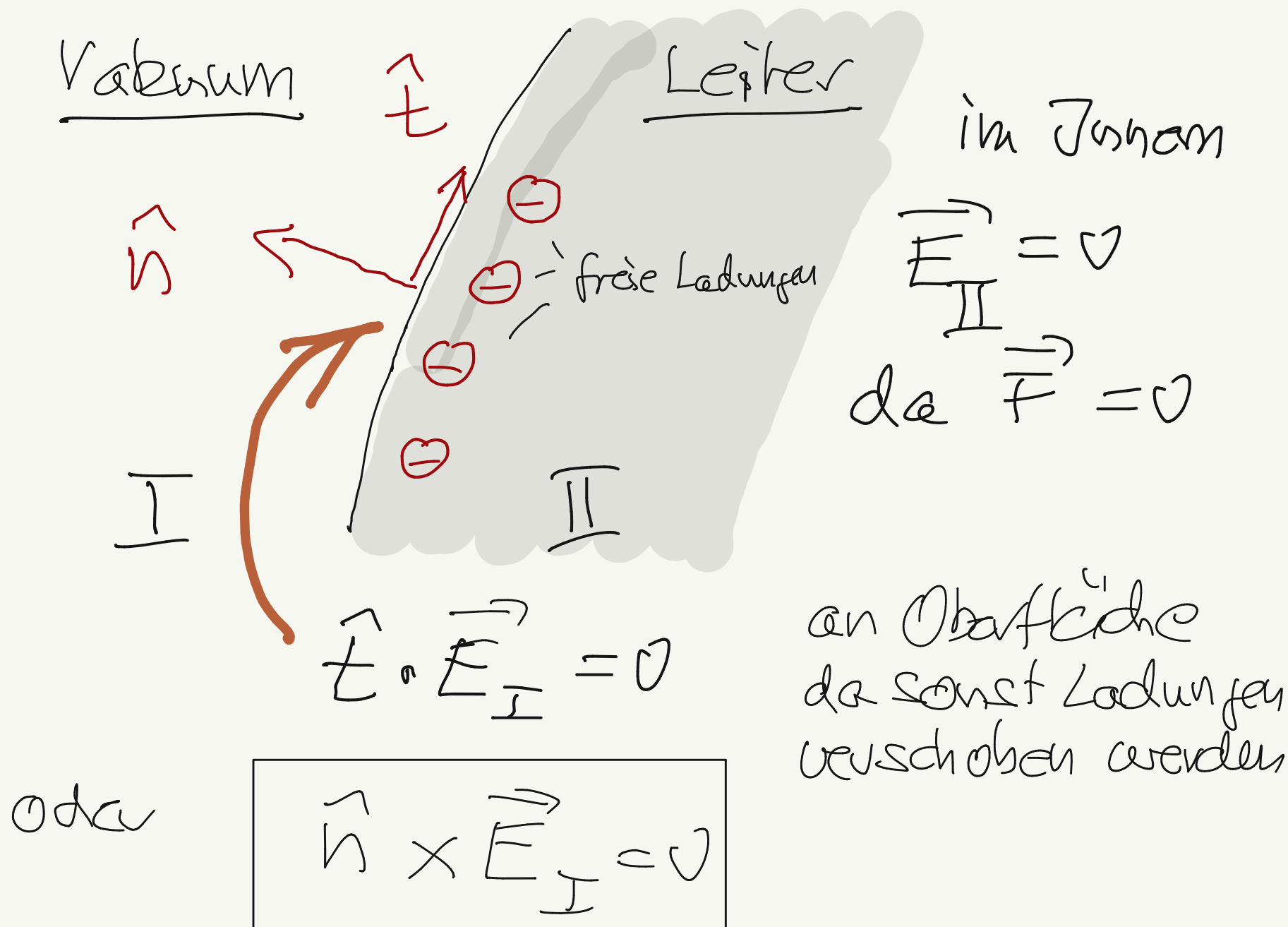
Beispiel von oben:

rotiert Punktdipol
in Richtung des
Feldes



XIV.3 Potential und elektr. Feld an Grenzflächen

(A) ideale elektrische Leiter



$\Rightarrow$ Wie sehen Übergangsbedingungen für das elektrische Feld aus?

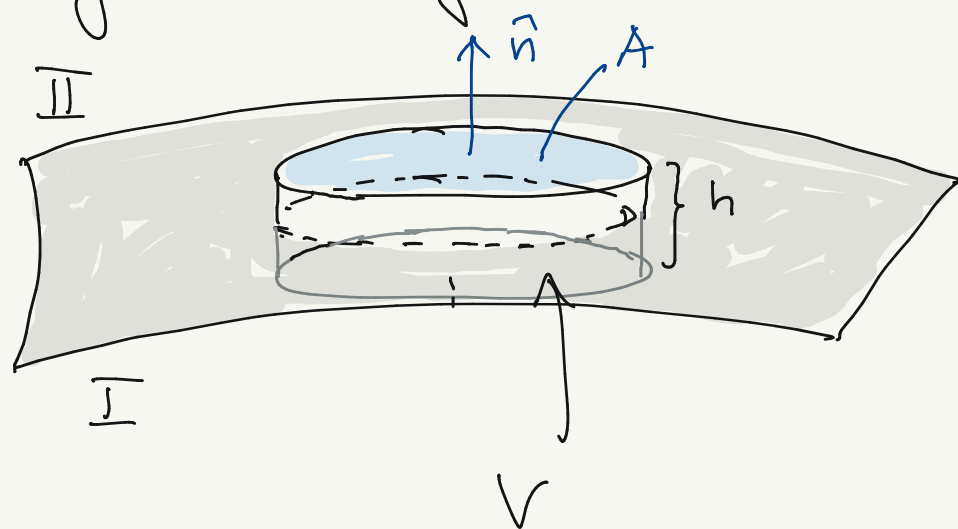
(B) Übergangsbedingungen an Grenzflächen

Feld

Maxwellgleichung

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$E_n = \vec{E} \cdot \vec{n}$$



$$\frac{1}{A} \int dV \rho = \frac{\epsilon_0}{A} \int_V dV \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \stackrel{\text{Gauß}}{=} \frac{\epsilon_0}{A} \int_{\partial(V)} d\vec{A} \cdot \vec{E}$$

$$\stackrel{h \rightarrow 0}{\sim} \frac{\epsilon_0}{A} \left(\int_{\text{Deckfläche}} dA E_n^{\text{II}} - \int_{\text{Grundfl.}} dA E_n^{\text{I}} \right)$$

$$\stackrel{A \rightarrow 0}{=} \epsilon_0 (E_n^{\text{II}} - E_n^{\text{I}}) = \lim_{A \rightarrow 0} \frac{1}{A} \int dV \rho = \rho$$

$$\hat{n} \cdot (\vec{E}^{\text{II}} - \vec{E}^{\text{I}}) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

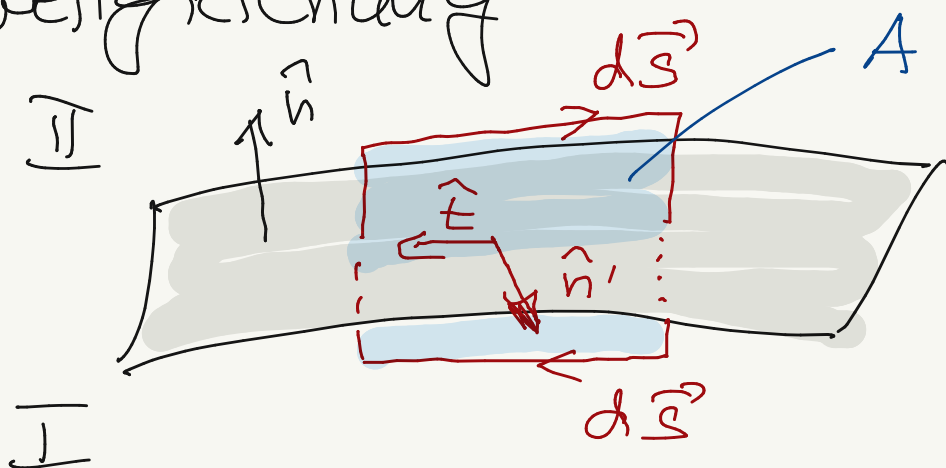
Oberflächen-
ladungsdichte

An einer Grenzfläche macht die Normalenkomponente des elektrischen Feldes einen Sprung, gegeben durch die Oberflächenladungsdichte an der Grenzfläche.

Folgerung für ideale Leiter: Da im Innern des Leiters kein Feld existiert muß eine Oberflächenladungsdichte an der Oberfläche existieren wenn im Außenraum ein elektrisches Feld vorliegt!

Aus der Maxwellgleichung

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$$



$$\int_A d\vec{A} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{E} = \oint_{\partial(A)} d\vec{s} \cdot \vec{E} = 0$$

$$A \rightarrow 0$$

$$0 = E_t^{\text{II}} - E_t^{\text{I}} = \hat{n} \times (\vec{E}^{\text{II}} - \vec{E}^{\text{I}})$$

An einer Grenzfläche gehen die Tangentialkomponenten des elektrischen Feldes stetig über.

• Potential

$$\text{aus } \hat{n} \cdot (\vec{E}^{\text{II}} - \vec{E}^{\text{I}}) = \sigma / \epsilon_0$$

$$\hat{n} \cdot (\vec{\nabla} \phi^{\text{II}} - \vec{\nabla} \phi^{\text{I}}) = - \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

$$\frac{\partial \phi^{\text{II}}}{\partial \vec{n}} - \frac{\partial \phi^{\text{I}}}{\partial \vec{n}} = - \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Normalenableitung des Potentials macht einen Sprang

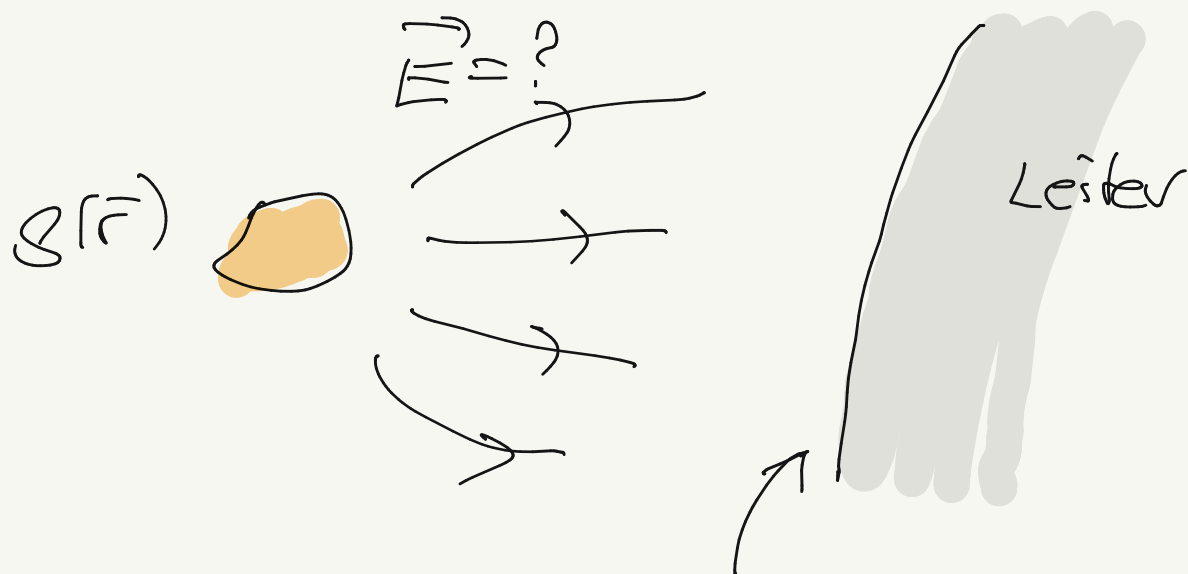
$$\text{aus } \hat{n} \times (\vec{E}^{\text{II}} - \vec{E}^{\text{I}}) = 0$$

$$\hat{n} \times (\vec{\nabla} \phi^{\text{II}} - \vec{\nabla} \phi^{\text{I}}) = 0$$

Tangentialableitung des Potentials ist stetig

(c) Randbedingungen

Oft muß man das elektrische Feld (Potential) einer Ladungsverteilung bei Vorhandensein bestimmter Grenzflächen z.B. Oberflächen idealer Leiter bestimmen. Dieser läßt sich am einfachsten als ein Randwertproblem formulieren



an der Leiteroberfläche muß $\vec{E}_t = 0$
d.h. an Leiteroberfläche gilt

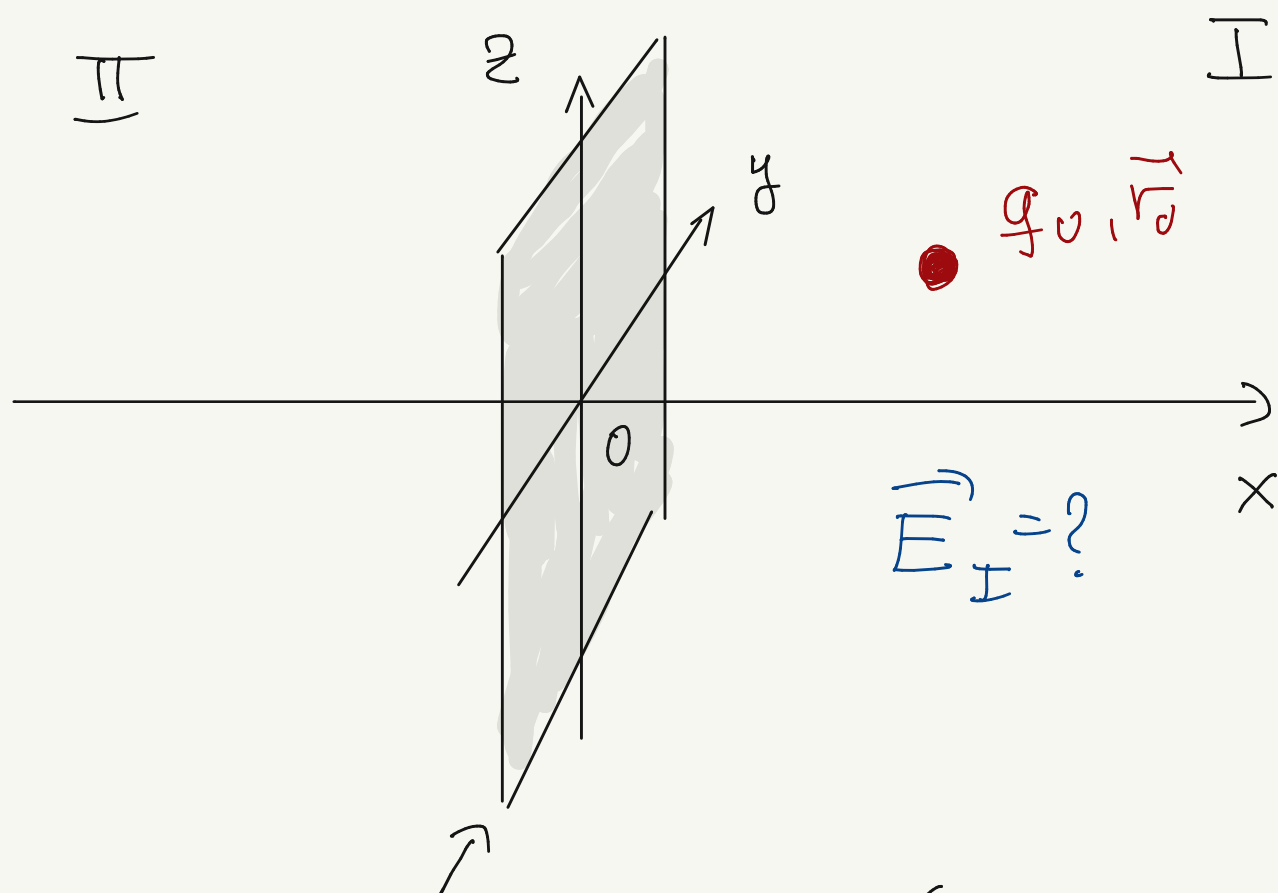
$$\hat{n} \times \vec{E} = -\hat{n} \times \vec{\nabla} \phi = 0$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \hat{n}} = 0$$

Leiter = "Äquipotential-
fläche"

- Dirichlet Randbedingung ϕ auf Rand gegeben
- Neumann Randbedingung $\frac{\partial \phi}{\partial \hat{n}}$ auf Rand gegeben

(D) Spiegelladungsmethode



leitende Platte (unendlich ausgedehnt)

Wir wollen das elektrische Feld im Raum I berechnen. Hinter der Leiterplatte gibt es keine (echten) Ladungen, d.h. wir wissen bereits

$$\vec{E}_{II} = 0$$

Bereich I:

$$\Delta\phi = -\frac{q_0}{\epsilon_0} \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_0)$$

Randbed. $\phi = \phi_0$ für $x \leq 0$

Lösungsidee für Raum I, d.h. $x \geq 0$

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} + f(\vec{r})$$

wobei für $x \geq 0$ (!!)

$$\Delta f(\vec{r}) = 0$$

Wählen f so, daß $\phi(x, y, z) = \phi_0 = \text{const.}$

$$\Rightarrow f(\vec{r}) = \phi_0 + \frac{-q_0}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_0'|}$$

$$\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0) \quad \vec{r}_0' = (-x_0, y_0, z_0)$$

Spiegelladung

Achtung: liefert nur korrektes Resultat im Raumbereich I

$$\phi(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} - \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_0'|} \right\} + \phi_0 & x \geq 0 \\ \phi_0 & x \leq 0 \end{cases}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3} - \frac{\vec{r} - \vec{r}_0'}{|\vec{r} - \vec{r}_0'|^3} \right) & x \geq 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

Da die Leiteroberfläche eine Äquipotentialfläche ist ($\phi \equiv \phi_0$) steht das elektrische Feld senkrecht auf der Oberfläche. Nach der Diskussion der Bedingungen an Grenzflächen folgt, daß es auf dem Leiter eine Oberflächenladungsdichte geben muß.

$$\sigma(y, z) = \epsilon_0 \hat{n} \cdot (\vec{E}^I(o, y, z) - \vec{E}^II(o, y, z))$$

||
0

$$\sigma(y, z) = \epsilon_0 E_x^I(o, y, z)$$

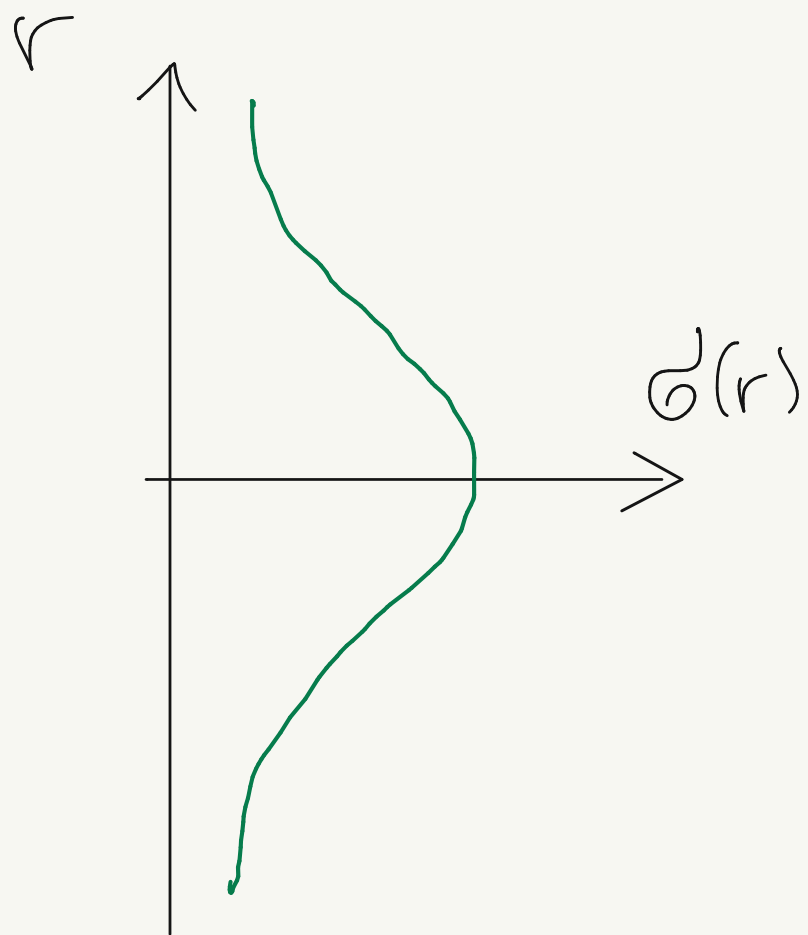
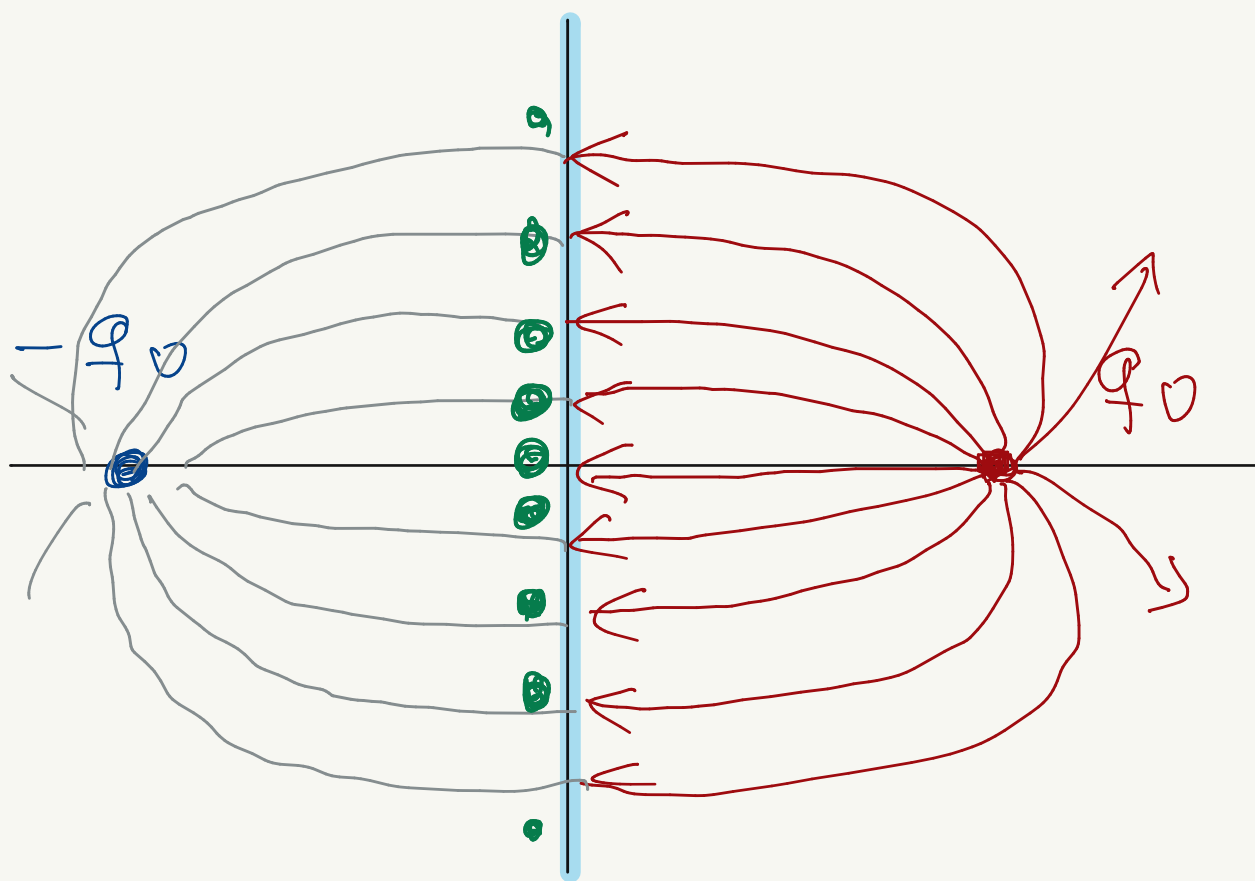
influenzierte Oberflächenladungsdichte

D.h. die Ursprungsladung führt zu einer Ladungsverschiebung auf der Leiterplatte, d.h. sie influenziert eine Ladungsdichte auf der Oberfläche

Bsp1: q_0 bei $\vec{r}_0 = (b, 0, 0)$

$$x \geq 0 \quad \vec{E}(\vec{r}) = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\vec{r} - b\vec{e}_x}{|\vec{r} - b\vec{e}_x|^3} - \frac{\vec{r} + b\vec{e}_x}{|\vec{r} + b\vec{e}_x|^3} \right)$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\sigma(y, z) = - \frac{q_0 b}{2\pi(a^2 + r^2)^{3/2}}}} \quad r^2 = y^2 + z^2$$



- gesamte induzierte Oberflächenladung

$$q_{\text{infl}} = 2\pi \int_0^{\infty} dr \, r \sigma(r) = -b q_0 \int_0^{\infty} dr \frac{r}{(b^2 + r^2)^{3/2}} = -q_0$$

$$q_{\text{infl.}} = -q_0 = \text{Bildladung}$$

- Kraft auf Ladung (= -Kraft auf Leiter)

$$\vec{F} = q_0 \vec{E}_{\text{Bild}}(\vec{r}_0) = - \frac{q_0^2}{4\pi \epsilon_0 4b^2} \vec{e}_x$$

stetig attraktiv

- Verallgemeinerung

für Spezialfälle
möglich

⇒ 3 Bildladungen

