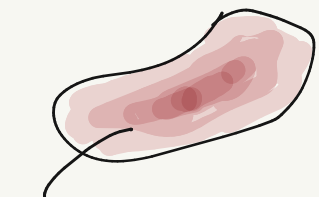


XIV. Elektrostatik

XIV.1 Elektr. Feld und Potential einer Ladungsverteilung im unendlich ausgedehnten Raum



$$g(\vec{r}) \Rightarrow \vec{E}(\vec{r})? \\ \phi(\vec{r})?$$

Grundgleichungen:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$$

(*)

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$$

• Eichfreiheit

$$\phi \rightarrow \phi' = \phi - \underbrace{\frac{\partial \lambda}{\partial t}}_{\text{konst}_t} = \phi' + \text{konst.}$$

ist beschränkt auf konstanten Term.

• Einsetzen von (*) in Maxwell $\Rightarrow$

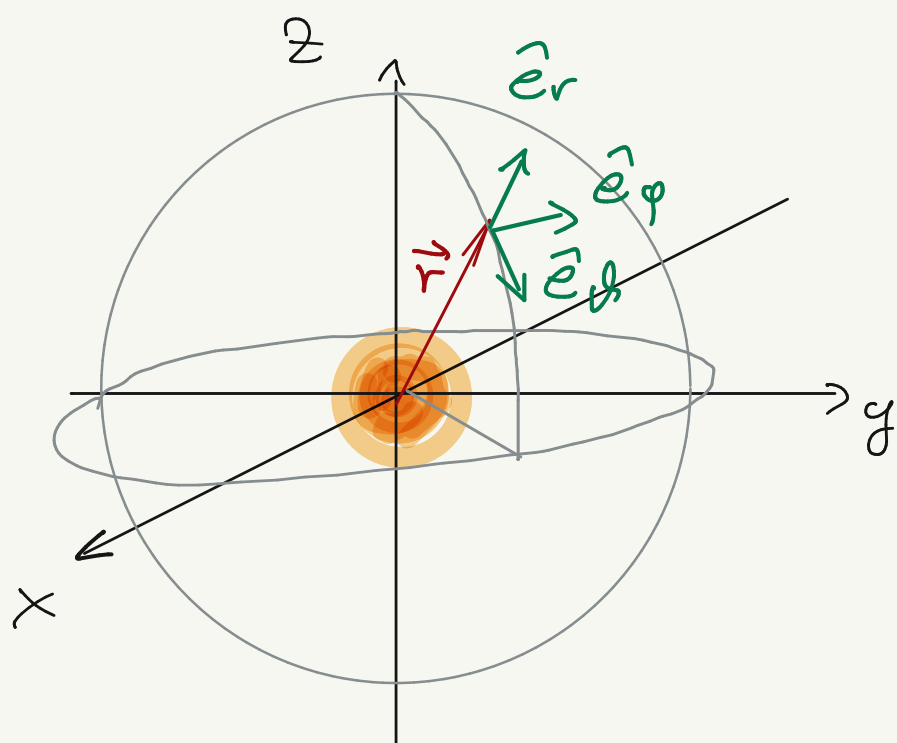
$$\Delta\phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Poissonsgleichung

• Lösung elektrostatischer Probleme (im unendlich ausgedehnten Raum ohne Randbedingungen) = Lösung von

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0 \quad \text{oder} \quad \Delta\phi = -\rho/\epsilon_0$$

(A) Rotationssymmetrische Ladungsverteilung



Kugelkoordinaten

$$g(\vec{r}) = g(r, \theta, \varphi) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Symmetrie}}}{g(r)}$$

$$\Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = E(r) \hat{e}_r$$

- nur Radialkomponente $\propto \hat{e}_r$
- diese nur von r abhängig

MWGL

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{g(r)}{\epsilon_0}$$

Wegen der Symmetrie des Problems kann man die Maxwellgleichungen direkt integrieren

V_R = Kugel mit Radius R

$$\int_{V_R} dV \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \oint_{\partial(V_R)} d\vec{A} \cdot \vec{E} = 4\pi R^2 E(R)$$

$$= \int_{V_R} dV \frac{g(r)}{\epsilon_0} = \frac{Q_R}{\epsilon_0}$$

- Q_R - Ladung innerhalb der Kugel mit Radius R

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\vec{e}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2} Q_r$$

$$Q_r = \int_0^r dr' 4\pi r'^2 g(r')$$

• einzelne Punktladung im Ursprung q

$$g(\vec{r}) = q \delta(\vec{r})$$

$$\int dV g(\vec{r}) = q \int dV \delta(\vec{r}) = q$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$$

elektr. Feld
einer
Punktladung

• Potential ? $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi$ $\phi = \phi(r)$

Kugelkoordinaten

$$\vec{\nabla}\phi = \vec{e}_r \frac{\partial\phi}{\partial r} + \vec{e}_\vartheta \frac{1}{r} \frac{\partial\phi}{\partial\vartheta} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r\sin\vartheta} \frac{\partial\phi}{\partial\varphi}$$

nur dieser Beitrag

$$-\frac{\partial}{\partial r} \phi(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$\phi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} + \phi_0$$

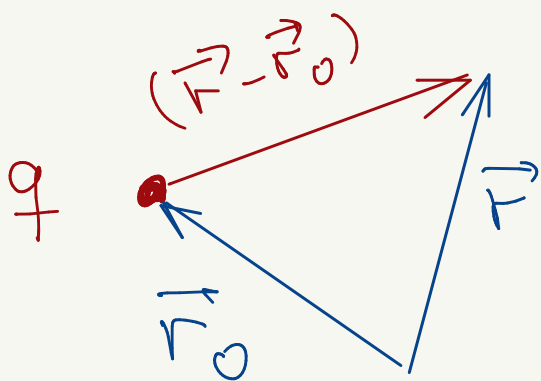
" ϕ_0 " entspricht
Eichfreiheit

Potential einer Punktladung
am Ursprung

- Punktladung am Ort $\vec{r}_0$

$$\phi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_0|} + \phi_0$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} \phi(\vec{r}) = \frac{q (\vec{r} - \vec{r}_0)}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_0|^3}$$



$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_0|^2} \underbrace{\frac{(\vec{r} - \vec{r}_0)}{|\vec{r} - \vec{r}_0|}}_{\text{Einheitsvektor von } \vec{r}_0 \text{ nach } \vec{r}}$$

Einheitsvektor von $\vec{r}_0$ nach $\vec{r}$

(B) Feld und Potential einer beliebigen Ladungsverteilung

Superpositionsprinzip:

Ensemble von Punktladungen q_j an Orten $\vec{r}_j$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_j \frac{q_j (\vec{r} - \vec{r}_j)}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_j|^3}$$

$$\phi(\vec{r}) = \sum_j \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_j|} + \phi_0$$

- kontinuierliche Ladungsverteilung

$$\sum_j q_j \longrightarrow \int dV \rho(\vec{r})$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int dV' \frac{\rho(\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

$$(*) \quad \phi(\vec{r}) = \int dV' \frac{\rho(\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'|} + \phi_0$$

allgemeine Lösung für beliebige Ladungsverteilungen

- nützliche Identität:

$$\vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} = - \frac{(\vec{r} - \vec{r}_0)}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3}$$

- Erfüllt $\phi(\vec{r})$ aus (*) die Poisson-Gleichung $\Delta \phi(\vec{r}) = -\rho(\vec{r})/\epsilon_0$?

$$\Delta \phi(\vec{r}) = \int dV' \frac{\rho(\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0} \Delta \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

hier wirkt Δ

Ableitung nach $\vec{r}$ = Ableitung nach $\vec{r} - \vec{r}'$ wenn $\vec{r}'$ fix

$\Rightarrow$ es reicht

$$\Delta \left(\frac{1}{r} \right) = ?$$

in Kugelkoordinaten

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \underbrace{r^2 \frac{\partial}{\partial r}} + \text{Ableitungen nach } \vartheta, \varphi$$

$$\boxed{r \neq 0} \quad \underbrace{r^2 \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r}} = -r^2 \frac{1}{r^2} = -1$$

$$\text{d.h.} \quad \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \right) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (-1) = 0$$

$$\Rightarrow \Delta\left(\frac{1}{r}\right) = 0 \quad \text{für } r \neq 0$$

$$\boxed{r=0} \quad ?$$

betrachten Integral über Kugel mit Radius $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\int_{K_\varepsilon} dV \Delta\left(\frac{1}{r}\right) f(r) \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\approx} f(0) \int_{K_\varepsilon} dV \Delta\left(\frac{1}{r}\right)$$

$$\underset{\substack{\text{Satz von} \\ \text{Gauß}}}{=} f(0) \int_{\partial(K_\varepsilon)} dA \hat{n} \cdot \vec{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right) = f(0) \int_{\partial(K_\varepsilon)} dA \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r}\right)$$

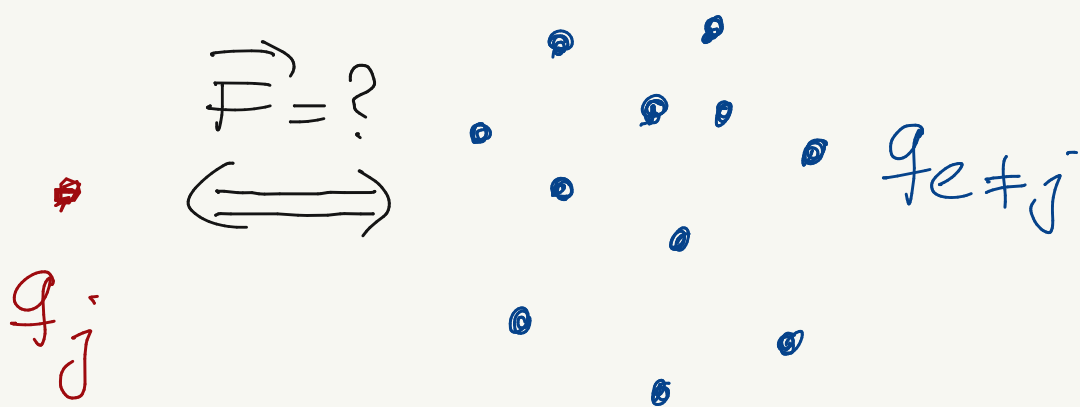
$$\hat{n} = \hat{e}_r \quad \text{für Kugel}$$

$$= f(0) \int_{\partial(K_\varepsilon)} dA \left(-\frac{1}{\varepsilon^2}\right) = f(0) \cancel{\varepsilon^2} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\vartheta \sin\vartheta}_{=4\pi} \left(-\frac{1}{\cancel{\varepsilon^2}}\right)$$

$$= -4\pi f(0)$$

$$\Delta\left(\frac{1}{r}\right) = -4\pi \delta^{(3)}(\vec{r})$$

(c) Kraft zwischen Punktladungen und potentielle Energie



Kraft auf Punktladung q_j

$$\vec{F}_j = q_j \vec{E}(\vec{r}_j)$$

$$= q_j \sum_{e \neq j} \frac{q_e (\vec{r}_j - \vec{r}_e)}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}_j - \vec{r}_e|^3}$$

Coulomb
Kraft

$$\vec{F}_j = -\vec{\nabla}_j \underbrace{\sum_{e \neq j} \frac{q_j q_e}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}_j - \vec{r}_e|}}_{\text{pot. Energie der Ladung } q_j}$$

$$\vec{\nabla}_j = \frac{\partial}{\partial \vec{r}_j}$$

$$U = \frac{1}{2} \sum_e \sum_{j \neq e} \frac{q_j q_e}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}_j - \vec{r}_e|}$$

" $\frac{1}{2}$ " damit keine Doppelzählung

potentielle
Energie
des Systems
aus
Punktladungen

(D) Greensche Funktion *

Wir haben gesehen, daß die Lösung der Poissongleichung
(lineare inhomogene DGL)

$$(*) \quad \Delta \phi(\vec{r}) = - \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0}$$

im unendlich ausgedehnten Raum, d.h. ohne weitere Randbedingungen als ein Integral geschrieben werden kann:

$$(**) \quad \phi(\vec{r}) = \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'|} + \phi_0$$

Ein wichtiges formales Hilfsmittel zur Lösung inhomogener linearer DGLen ist die

Greensche Funktion $G(\vec{r}, \vec{r}')$

Sie ist Lösung der DGL mit Punktquelle $\delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}')$

$$\Delta_{\vec{r}} G(\vec{r}, \vec{r}') = \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}')$$

(Ableitung nach $\vec{r}$, nicht $\vec{r}'$)

Bei Kenntnis von $G(\vec{r}, \vec{r}')$ kann die Poissongleichung
(allg. inhomogene partielle DGL) für jede Inhomogenität gelöst werden

$$\phi(\vec{r}) = - \int d^3r' G(\vec{r}, \vec{r}') \rho(\vec{r}') / \epsilon_0$$

Bew.:

$$\begin{aligned}\Delta\phi(\vec{r}) &= - \int d^3r' \underbrace{\Delta_{\vec{r}} G(\vec{r}, \vec{r}')}_{\delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}')} \frac{\rho(\vec{r}')}{\epsilon_0} \\ &= - \int d^3r' \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}') \frac{\rho(\vec{r}')}{\epsilon_0} \\ &= - \rho(\vec{r}) / \epsilon_0 \quad \square\end{aligned}$$

Aus Vergleich mit (***) finden wir für die Poissonsgleichung

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = - \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Wir hatten ja bereits gesehen, daß $\Delta \frac{1}{4\pi r} = \delta^{(3)}(\vec{r})$.

Wir werden mithilfe der Fouriertransformation eine Methode kennenlernen, wie wir die Greensche funktion allgemeiner linearer (partieller) Differentialgleichungen bestimmen können $\Rightarrow$ Siehe Fouriertransformation.

XIV. 2 Monopol, Dipol, Quadrupol

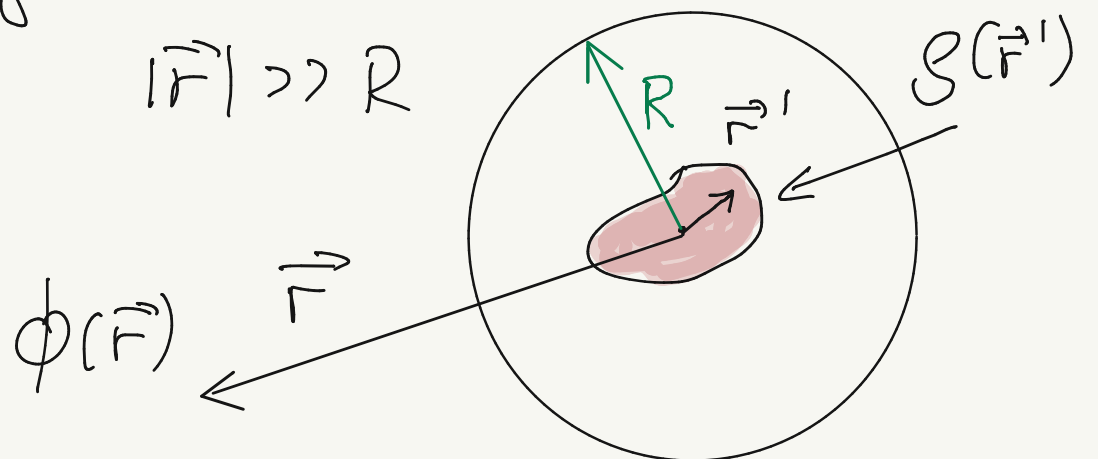
Problem von: $\phi(\vec{r}) = \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'|} + \phi_0$

Integral muß für jeden Ort $\vec{r}$ neu berechnet werden



(A) Feld im Außenraum einer Ladungsverteilung

Näherungsweise Berechnung
des Feldes
außerhalb der
Ladungsverteilung?



$|\vec{r} - \vec{r}'| \gg R > |\vec{r}'|$ Taylorentwicklung von $\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{j=1}^3 \left((-x'_j) \frac{\partial}{\partial x_j} \right)^n \frac{1}{r} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-\vec{r}' \cdot \vec{\nabla})^n \frac{1}{r} \\ &= \frac{1}{r} - (\vec{r}' \cdot \vec{\nabla}) \frac{1}{r} + \frac{1}{2} (\vec{r}' \cdot \vec{\nabla}) (\vec{r}' \cdot \vec{\nabla}) \frac{1}{r} + \dots \end{aligned}$$

man ist

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \frac{1}{r} &= \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} + \dots \cancel{\partial_\theta \frac{1}{r}} + \dots \cancel{\partial_\phi \frac{1}{r}} \\ &= -\frac{\vec{e}_r}{r^2} = -\frac{\vec{r}}{r^3} \end{aligned}$$

$=0 \quad =0$

d.h.

$$(\vec{r}' \cdot \vec{\nabla}) \frac{1}{r} = -\frac{\vec{r}' \cdot \vec{r}}{r^3}$$

noch einer etwas längeren Rechnung findet man

$$(*) \quad (\vec{r}' \cdot \vec{\nabla})(\vec{r}' \cdot \vec{\nabla}) \frac{1}{r} = -\frac{r'^2}{r^3} + \frac{3(\vec{r}' \cdot \vec{r})^2}{r^5}$$

und hier die Rechnung:

$$(\vec{r}' \cdot \vec{\nabla})(\vec{r}' \cdot \vec{\nabla}) \frac{1}{r} = (\vec{r}' \cdot \vec{\nabla}) \left(-\frac{\vec{r}' \cdot \vec{r}}{r^3} \right)$$

d.h. erst einmal

das ist hier eine Konstante!

$$\vec{\nabla} \frac{\vec{r}' \cdot \vec{r}}{r^3} = \frac{1}{r^3} \vec{\nabla} (\vec{r}' \cdot \vec{r}) + \vec{r}' \cdot \vec{r} \vec{\nabla} \frac{1}{r^3}$$

$$\vec{\nabla} (\vec{a} \cdot \vec{r}) = \hat{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} a_e x_e = \hat{e}_i a_e \frac{\partial x_e}{\partial x_i} = \hat{e}_i \hat{a}_i = \vec{a}$$

(Sammelenkonvention) "δ_{ie}"

d.h.

$$\vec{\nabla} \frac{\vec{r}' \cdot \vec{r}}{r^3} = \frac{\vec{r}'}{r^3} - (\vec{r}' \cdot \vec{r}) 3 \frac{1}{r^4} \hat{e}_r = \frac{\vec{r}'}{r^3} - \frac{3(\vec{r}' \cdot \vec{r}) \vec{r}}{r^5}$$

damit folgt (*)

Das gibt

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \approx \frac{1}{r} + \frac{\vec{r}' \cdot \vec{r}}{r^3} + \frac{3(\vec{r}' \cdot \vec{r})^2 - r^2 r'^2}{2r^5} + \dots$$

Um den 3. Term noch etwas schöner zu schreiben verwenden wir folgende Identität

$$\underline{\underline{3(\vec{r} \cdot \vec{r}')^2 - r^2 r'^2 = 3 x_j x_j' x_e x_e' - x_j' x_e' r^2 \delta_{je}}}$$

(Summenkonvention)

$$= x_j' x_e' (3 x_j x_e - r^2 \delta_{je})$$

$$= \underbrace{\left(x_j' x_e' - \frac{1}{3} r'^2 \delta_{je} \right)}_{\text{da:}} \underbrace{\left(3 x_j x_e - r^2 \delta_{je} \right)}_{=0}$$

aber auch:

$$\underbrace{\left(3 x_j' x_e' - r'^2 \delta_{je} \right)}_{=0} \underbrace{x_j x_e}_{=0}$$

$$\underline{\underline{= \left(3 x_j' x_e' - r'^2 \delta_{je} \right) x_j x_e}}}$$

Mit dieser Modifikation des 3. Terms finden wir

$$\phi(\vec{r}) = \int dV' \frac{\rho(\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r} + \frac{\vec{r}' \cdot \vec{r}}{r^3} + \left(3 x_e' x_j' - r'^2 \delta_{ej} \right) \frac{x_e x_j}{2r^5} + \dots \right] + \phi_0$$

Wir sehen daß wir die Integration über $\rho(\vec{r}')$ in Koeffizienten der Entwicklung nach $\frac{1}{r}$ stecken können.

Diese sind unabhängig vom Ort $\vec{r}$!

Diese Vorfaktoren sind die sogenannten Multipolmomente der Ladungsverteilung

$$q \equiv \int dV' \rho(\vec{r}')$$

Ladung

$$\vec{p} \equiv \int dV' \rho(\vec{r}') \vec{r}'$$

Dipolmoment
(Ladung * Abstand)

$$Q_{je} \equiv \int dV' \rho(\vec{r}') (3x'_j x'_e - r'^2 \delta_{je})$$

Quadrupoltensor

Diese sind eindeutig durch Ladungsverteilung und Wahl des Koordinatensystems (+ Ursprung) gegeben. Für das Potential ergibt sich (ohne ϕ_0)

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{r} + \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} + Q_{je} \frac{x_j x_e}{2r^5} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^4}\right) \right]$$

Monopol

$$\sim \frac{1}{r}$$

Dipol

$$\sim \frac{1}{r^2}$$

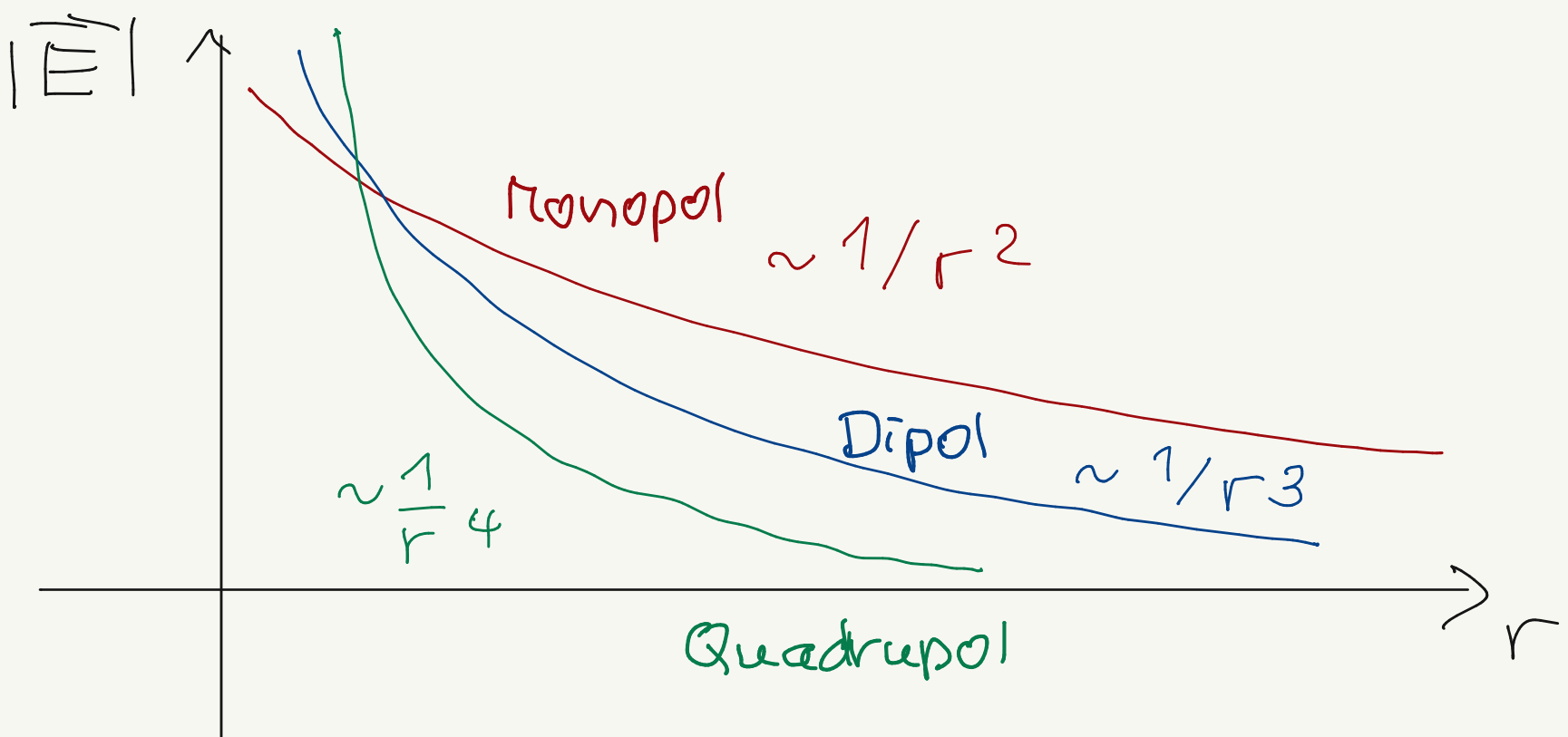
Quadrupol

$$\sim \frac{1}{r^3}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q\vec{r}}{r^3} + \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r} - \vec{p}r^2}{r^5} + \dots \right]$$

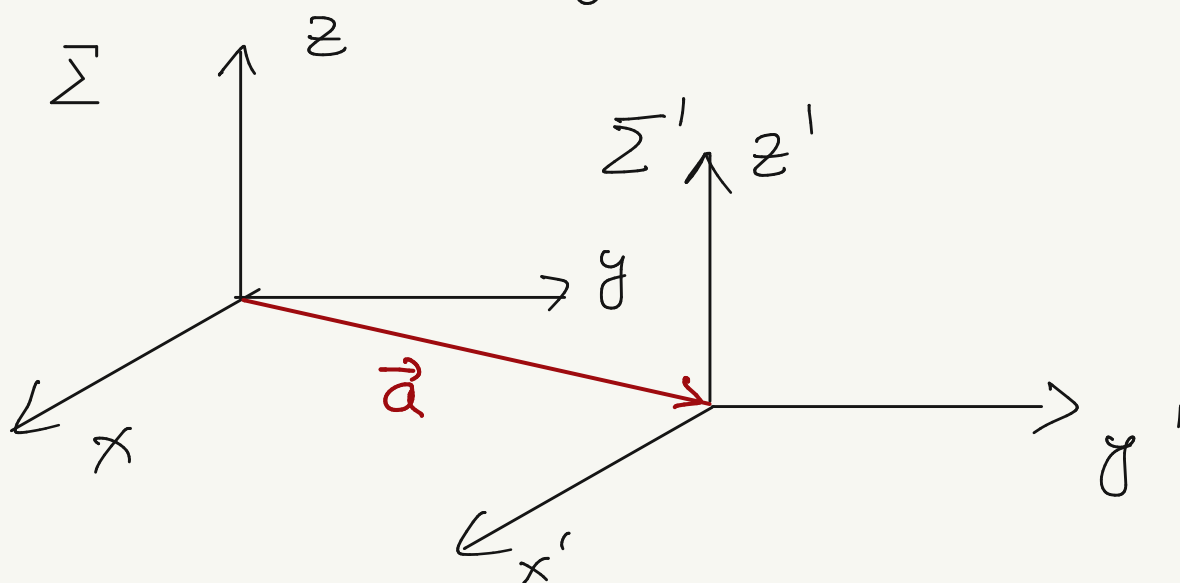
Monopol
 $\sim 1/r^2$

Dipol
 $\sim 1/r^3$



Aus dem Verhalten des elektrischen Feldes im Unendlichen kann man die verschiedenen Multipolmomente ablesen

Bem: Abhängigkeit vom Koordinatensystem



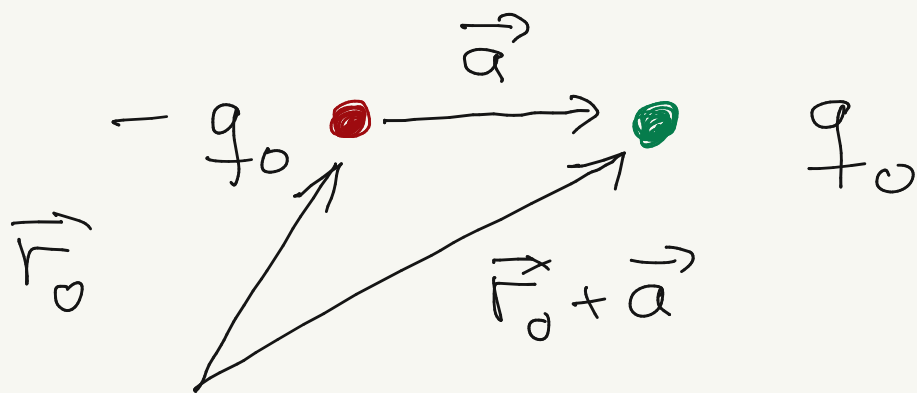
$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{a}$$

- Ladung $q = \int d^3r \rho = \int d^3r' \rho = q'$
- Dipol
$$\begin{aligned} \vec{p} &= \int d^3r \vec{r} \rho = \int d^3r' (\vec{r}' + \vec{a}) \rho \\ &= \vec{p}' + \vec{a} q \end{aligned}$$
 "Steinerscher Satz"

für $q=0$ d.h. "reiner" Dipol $\vec{p} = \vec{p}'$

(B) Punktdipol

Zwei Punktladungen
 $\pm q_0$ im Abstand $\vec{a}$



$$\mathcal{G}(\vec{r}) = -q_0 \left[\delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_0) - \delta^{(3)}(\vec{r} - (\vec{r}_0 + \vec{a})) \right]$$

Gesamtladung $q = q_0 - q_0 = 0$

- Dipolmoment (unabhängig vom Bezugspunkt da $q = 0$)

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{r}_0$$

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\vec{p}}} &= \int dV' \mathcal{G} \vec{r}' = -q_0 \int dV' \left(\delta^{(3)}(\vec{r}') - \delta^{(3)}(\vec{r}' - \vec{a}) \right) \vec{r}' \\ &= \underline{\underline{q_0 \vec{a}}} \end{aligned}$$

- Grenzübergang $|\vec{a}| \rightarrow 0$ mit $q_0 |\vec{a}| = \text{konst}$
 $\Rightarrow$ Punktdipol der Stärke $\vec{p}$

$$\mathcal{G}(\vec{r}) = \lim_{\substack{|\vec{a}| \rightarrow 0 \\ \vec{p} = \text{konst}}} |\vec{p}| \frac{\delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_0 - \vec{a}) - \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_0)}{|\vec{a}|}$$

$$\rho(\vec{r}) = -\vec{p} \cdot \vec{\nabla} \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_0)$$

Ladungsdichte eines Punktdipols

Jetzt überzeugen wir uns, daß diese Ladungsverteilung wirklich nur ein Dipolfeld erzeugt (ohne ϕ_0)

$$\begin{aligned} \phi(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int dV' \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = -\frac{\vec{p}}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int dV' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \vec{\nabla}' \delta^{(3)}(\vec{r}' - \vec{r}_0) \\ &= -\frac{\vec{p}}{4\pi\epsilon_0} \int dV' \left[\vec{\nabla}' \frac{\delta^{(3)}(\vec{r}' - \vec{r}_0)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \delta^{(3)}(\vec{r}' - \vec{r}_0) \vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] \\ &\quad \text{mit Satz von} \quad \underbrace{-\frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}}_{\text{Gauß} \equiv 0} \end{aligned}$$

$$\phi(\vec{r}) = -\frac{\vec{p}}{4\pi\epsilon_0} \int dV' \delta^{(3)}(\vec{r}' - \vec{r}_0) \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

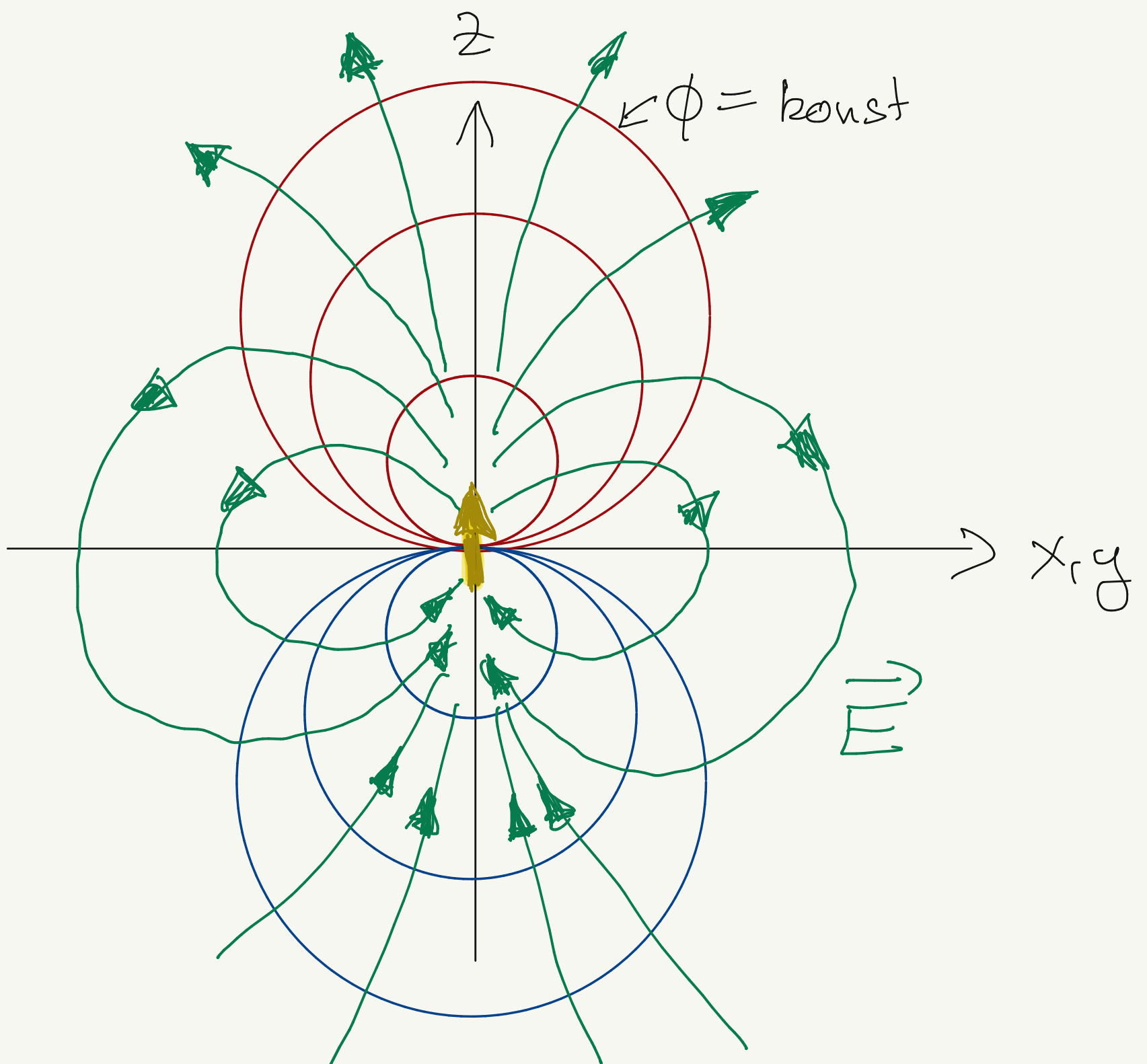
$$\phi(\vec{r}) = \frac{\vec{p} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0)}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_0|^3} \quad \checkmark \text{ nur Dipol} \quad \square$$

• OBD

$$\vec{p} = p \hat{e}_z$$

$$\vec{r}_0 = 0$$

$$\phi(\vec{r}) = \frac{p \cos\vartheta}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$



Potential und elektrisches Feld eines Punktdipols $\vec{p} = p \vec{e}_z$

(C) Kraft auf eine Ladungsverteilung

Betrachten Ladungsverteilung $g(\vec{r})$ in externem elektrischen Feld $\vec{E}_{\text{ext}}$

$$\vec{F} = \int dV g(\vec{r}) \vec{E}_{\text{ext}}$$

Betrachten:

$$(*) \quad g(\vec{r}) = q \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_0) - \vec{p} \cdot \vec{\nabla} \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_0) + \dots$$

Punktladung

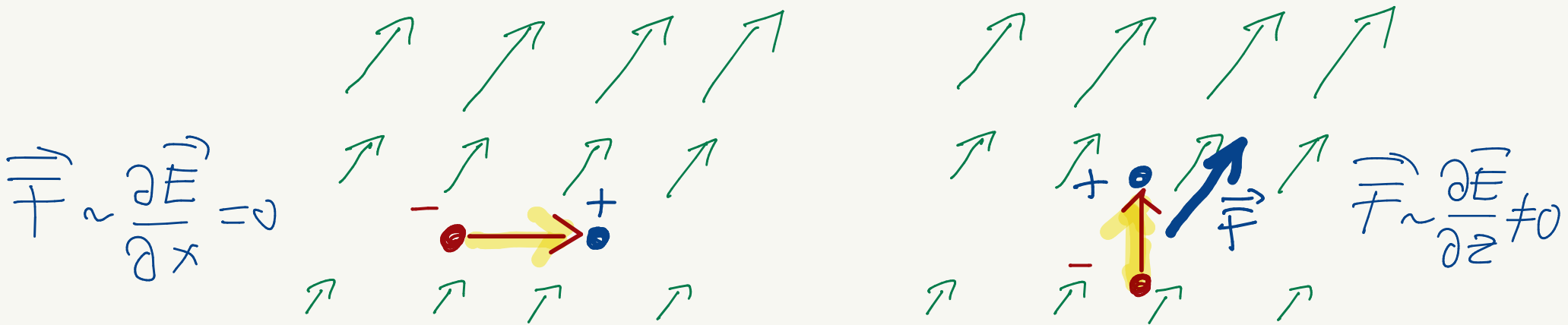
Punktdipol

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \vec{F} &= q \vec{E}_{\text{ext}}(\vec{r}_0) - \vec{p} \cdot \int dV \left(\vec{\nabla} \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_0) \right) \vec{E}_{\text{ext}}(\vec{r}) \\ &= q \vec{E}_{\text{ext}}(\vec{r}_0) + \int dV \delta^{(3)}(\vec{r} - \vec{r}_0) (\vec{p} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E}_{\text{ext}}(\vec{r}) \end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{F} = q \vec{E}_{\text{ext}}(\vec{r}_0) + (\vec{p} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E}_{\text{ext}}(\vec{r}_0)}$$

Richtungsableitung in Richtung $\vec{p}$



$$\vec{p} = p \hat{e}_x$$

$$\vec{p} \cdot \vec{\nabla} = p \frac{\partial}{\partial x}$$

umgekehrt gleich große Kräfte auf "+" und "-"

$$\vec{p} = p \hat{e}_z$$

$$\vec{p} \cdot \vec{\nabla} = p \frac{\partial}{\partial z}$$

Kraft auf "+" ist stärker als auf "-"

Aus dem Beispiel oben wird ersichtlich, daß auch ein Drehmoment auf den Dipol wirkt

$$\vec{M} = \int dV g(\vec{r}) (\vec{r} \times \vec{E}_{\text{ext}}(\vec{r}))$$

Mit Ladungsverteilung (*) und $\vec{r}_0 = 0$

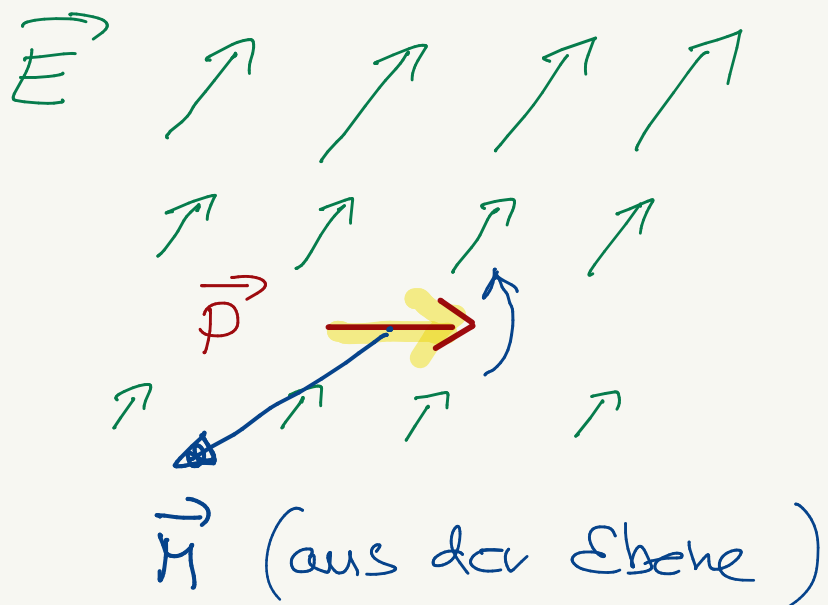
$$\vec{M} = \int dV \left(q \delta^{(3)}(\vec{r}) - \vec{p} \cdot \vec{\nabla} \delta^{(3)}(\vec{r}) \right) (\vec{r} \times \vec{E}_{\text{ext}}(\vec{r}))$$

↑ ↑
= 0

$$\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E}_{\text{ext}}(0)$$

Beispiel von oben:

rotiert Punktdipol
in Richtung des
Feldes



XIV.3 Potential und elektr. Feld an Grenzflächen

(A) ideale elektrische Leiter