

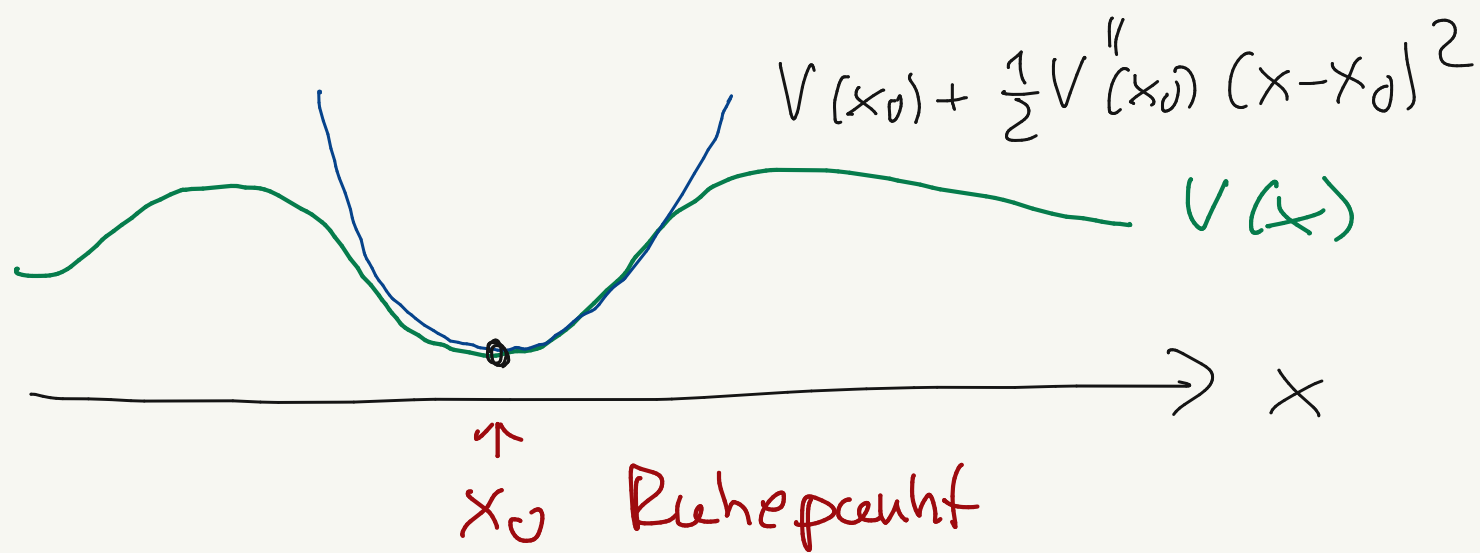
VI . Lineare Schwingungen

Die in Kap. VI besprochenen Methoden zur Lösung gewöhnlicher linearer DGL werden wir jetzt für ein wichtiges Grundproblem der Physik anwenden:
lineare Schwingungen

Massenpunkt in einer Dimension

$$m \ddot{x}(t) = F(x, t)$$

(a) zeitunabhängige Kraft $F(x) = -\frac{dV(x)}{dx}$



in der Nähe des Ruhepunktes

$$V(x) \approx V(x_0) + \frac{1}{2} V''(x_0) (x - x_0)^2$$

d.h. $F(x) \approx -V''(x_0) (x - x_0)$ linear in Auslenkung

sei $z = x - x_0$ Auslenkung vom Ruhepunkt

$$m \ddot{z} = -V''(x_0) z = -m\omega^2 z$$

$$\Rightarrow \ddot{z} + \omega^2 z = 0$$

nun nennen wir $z \rightarrow x$

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

Harmonischer
Oszillator

(b) lassen wir jetzt eine zeitabhängigkeit der Kraft zu

$$F(x, t) \approx F_0(t) + a(t)x \quad \text{O.B.d.A.} \quad (x_0=0)$$

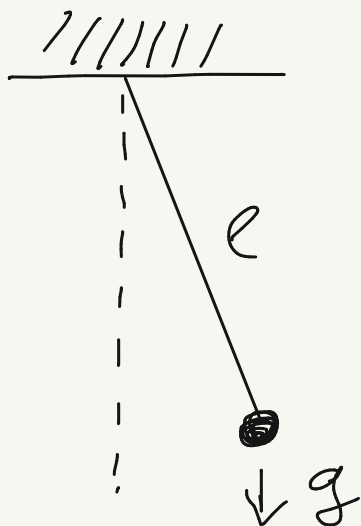
$\Rightarrow$

$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2(t)x(t) = f(t)$$

wobei $\omega_0^2(t) = -a(t)/m$ und $f(t) = \frac{F_0(t)}{m}$

allgemeiner geheimer harmonischer
Oszillator

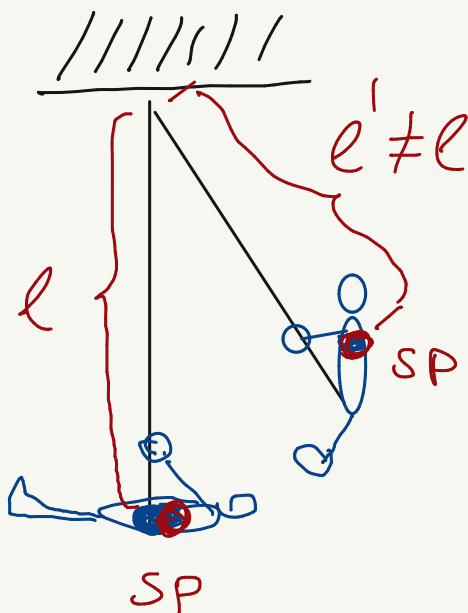
mathematisches
Pendel bei kleiner
Auslenkung



$$\omega_0(t) = \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$f(t) = 0$$

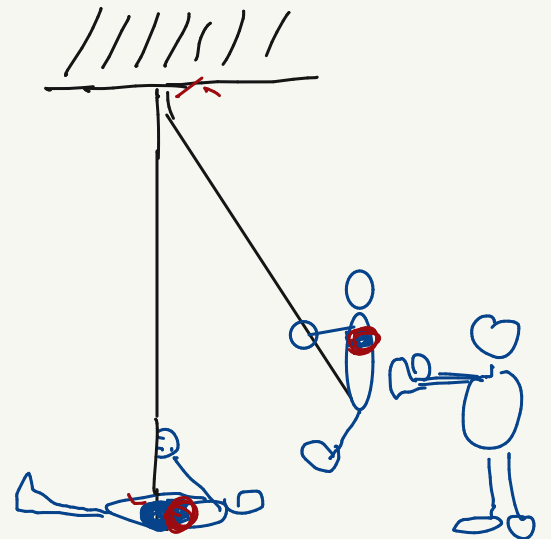
Schaukel



$$\omega_0 = \omega_0(t) \neq \text{const. } t$$

$$f(t) = 0$$

Schaukel mit
Antrieb



$$\omega_0 = \omega_0(t)$$

$$f(t) \neq 0$$

(c) oft kommt eine Stokes'sche Reibungskraft hinzu

$$\ddot{x}(t) + \underline{2\gamma \dot{x}(t)} + \omega_0^2 x(t) = f(t)$$

allg. geübener und gedämpfter harmon. Oszillator

VI.1 Der freie harmonische Oszillator

Wir betrachten zunächst einen harmonischen Oszillator mit konstanter Frequenz $\omega_0(t) = \omega_0$ und ohne Antrieb, d.h. $f(t) = 0$

$$(*) \quad \ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

lineare DGL mit konstanten Koeffizienten

→ Abzählungen reproduzieren Funktion $\Rightarrow$

Ansatz:

$$x(t) = e^{\lambda t}$$

Exponentialfunkt.

$$\dot{x}(t) = \lambda e^{\lambda t} = \lambda x(t)$$

$$\ddot{x}(t) = \lambda^2 e^{\lambda t} = \lambda^2 x(t)$$

$\Rightarrow$ Einsetzen in (*)

$$\cancel{\lambda^2 x(t)} + 2\gamma \cancel{\lambda x(t)} + \omega_0^2 \cancel{x(t)} = 0$$

für $x(t) \neq 0$

→ charakteristische Gleichung

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0$$

$$\lambda = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

(A) ungedämpfte Schwingung; $\gamma = 0$

$$\lambda_{1/2} = \pm i\omega_0$$

zwei linear unabhängige Lösungen

(a)
$$x_1(t) = e^{i\omega_0 t} \quad x_2(t) = e^{-i\omega_0 t} \quad \text{komplex}$$

wir wissen, daß auch Linearkombinationen Lösungen sind

$$\tilde{x}_1(t) = \frac{x_1(t) + x_2(t)}{2} = \cos \omega_0 t$$

$$\tilde{x}_2(t) = \frac{x_1(t) - x_2(t)}{2i} = \sin \omega_0 t$$

> reell

(b)
$$\tilde{x}_1(t) = \cos \omega_0 t \quad \tilde{x}_2(t) = \sin \omega_0 t$$

d.h. allg. Lösung

$$x(t) = a \cos \omega_0 t + b \sin \omega_0 t = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

Einschub

$$a \cos \omega t + b \sin \omega t$$

$$= \frac{a}{2} (e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}) + \frac{b}{2i} (e^{i\omega t} - e^{-i\omega t})$$

$$= \frac{1}{2} (a - ib) e^{i\omega t} + \frac{1}{2} (a + ib) e^{-i\omega t}$$

$$= r e^{i\varphi_0} e^{i\omega t} + r e^{-i\varphi_0} e^{-i\omega t}$$

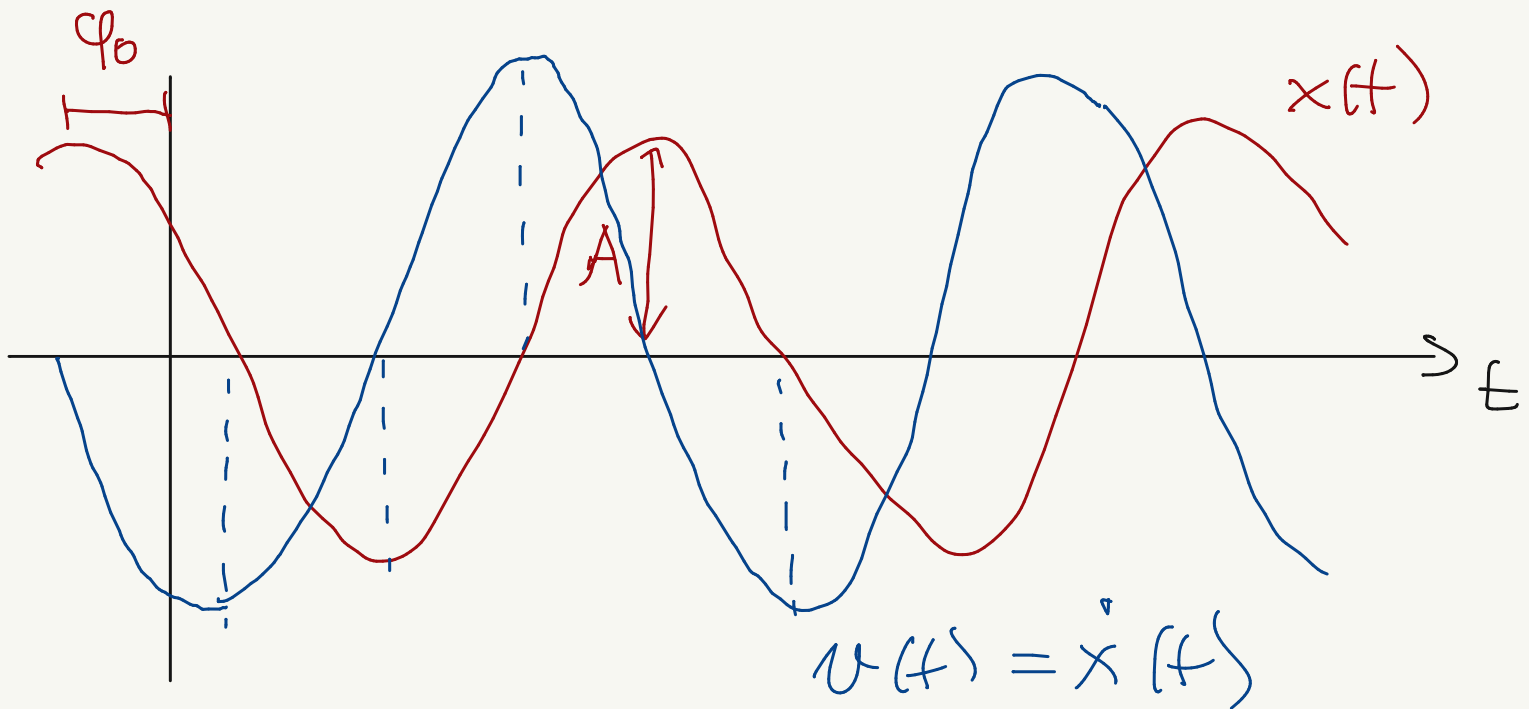
wobei $r = \left(\left| \frac{a}{2} \right|^2 + \left| \frac{b}{2} \right|^2 \right)^{1/2} \quad \tan \varphi_0 = -\frac{b}{a}$

$$\Rightarrow a \cos \omega t + b \sin \omega t = \overset{A}{=} 2r \cos(\omega t + \varphi_0)$$

□



$$\dot{x}(t) = -\omega_0 A \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$$

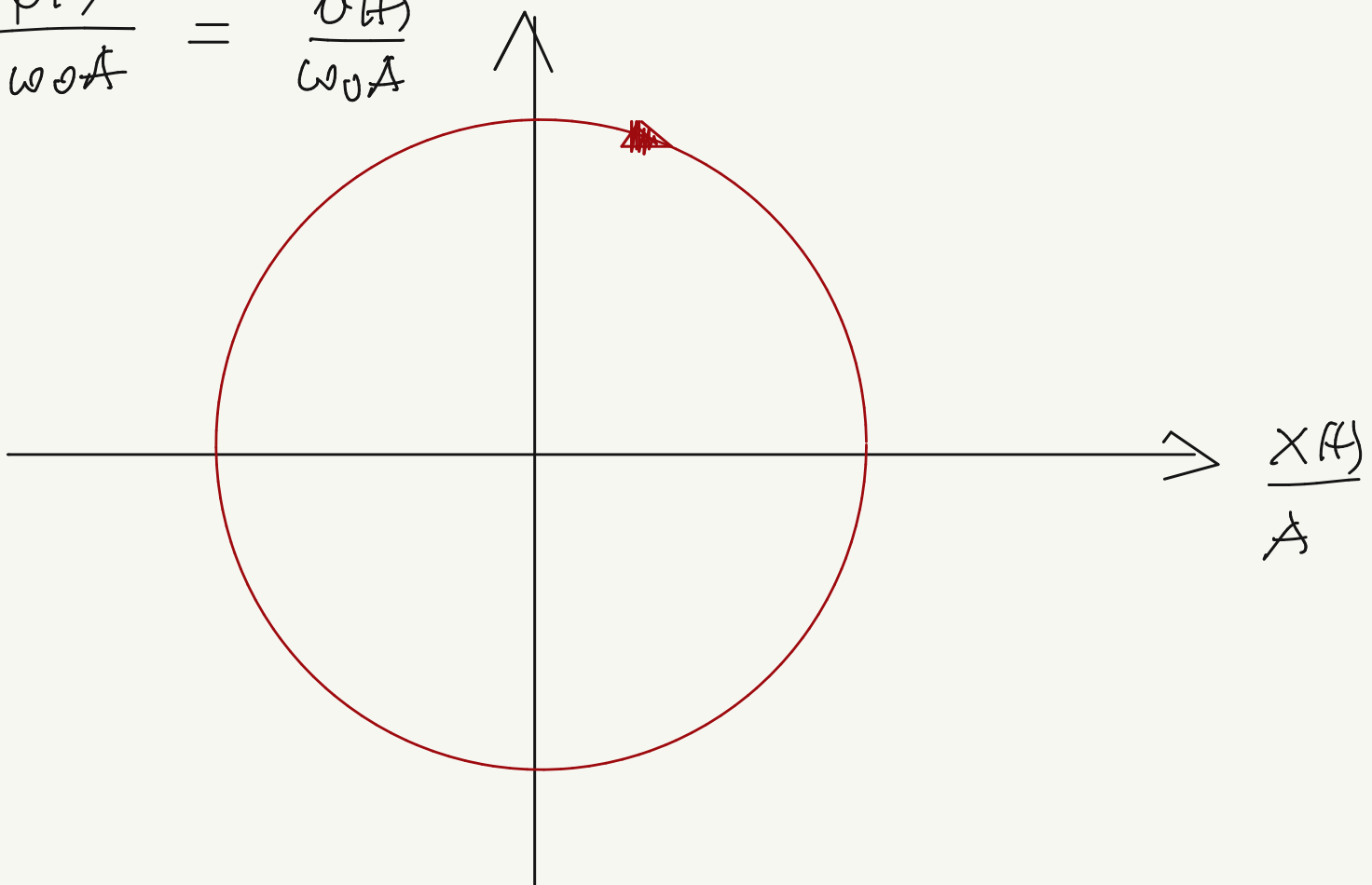


Phasenraum

$$\left(\frac{x(t)}{A}\right)^2 + \left(\frac{\dot{x}(t)}{\omega_0 A}\right)^2 = \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0) + \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0) = 1$$

Kreisgleichung

$$\frac{p(t)}{m\omega_0 A} = \frac{v(t)}{\omega_0 A}$$



(B) gedämpfte Schwingung

$$\lambda = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

$$\omega_0 > \gamma$$

Schwingfall

$$\lambda = \pm i\omega - \gamma$$

$$\omega \equiv \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

reduzierte Frequenz
+
exponentieller Abfall

$$\omega_0 < \gamma$$

Kriechfall

$$\lambda_1 = -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} < 0$$

$$\lambda_2 = -\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} < 0$$

nur exponentieller
Zerfall



$$\omega_0 > \gamma$$

Schwingfall

$$x_1(t) = e^{(i\omega - \gamma)t}$$

$$x_2(t) = e^{(-i\omega - \gamma)t}$$

oder

$$\tilde{x}_1(t) = \cos(\omega t) e^{-\gamma t}$$

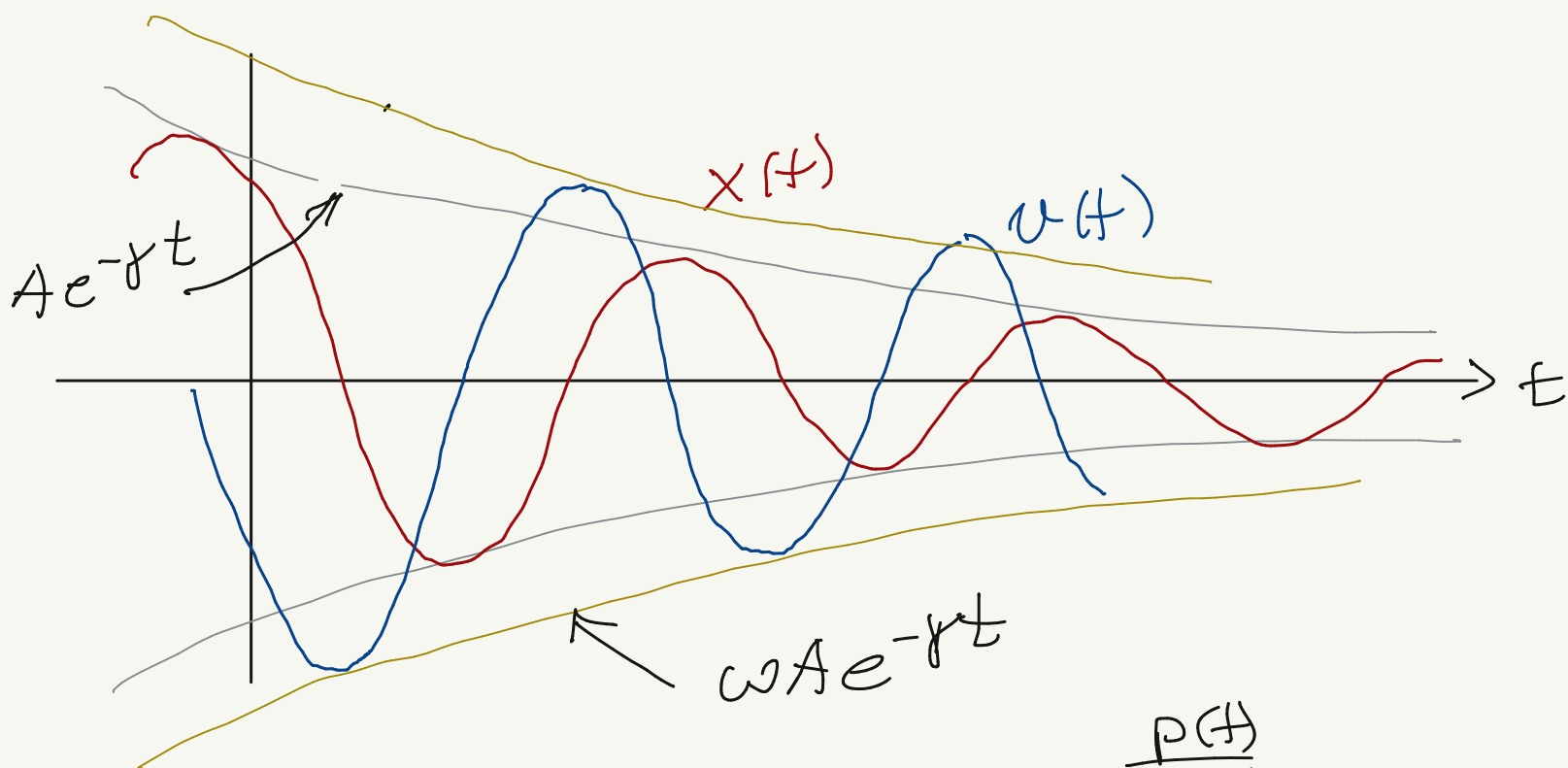
$$\tilde{x}_2(t) = \sin(\omega t) e^{-\gamma t}$$

$\Rightarrow$

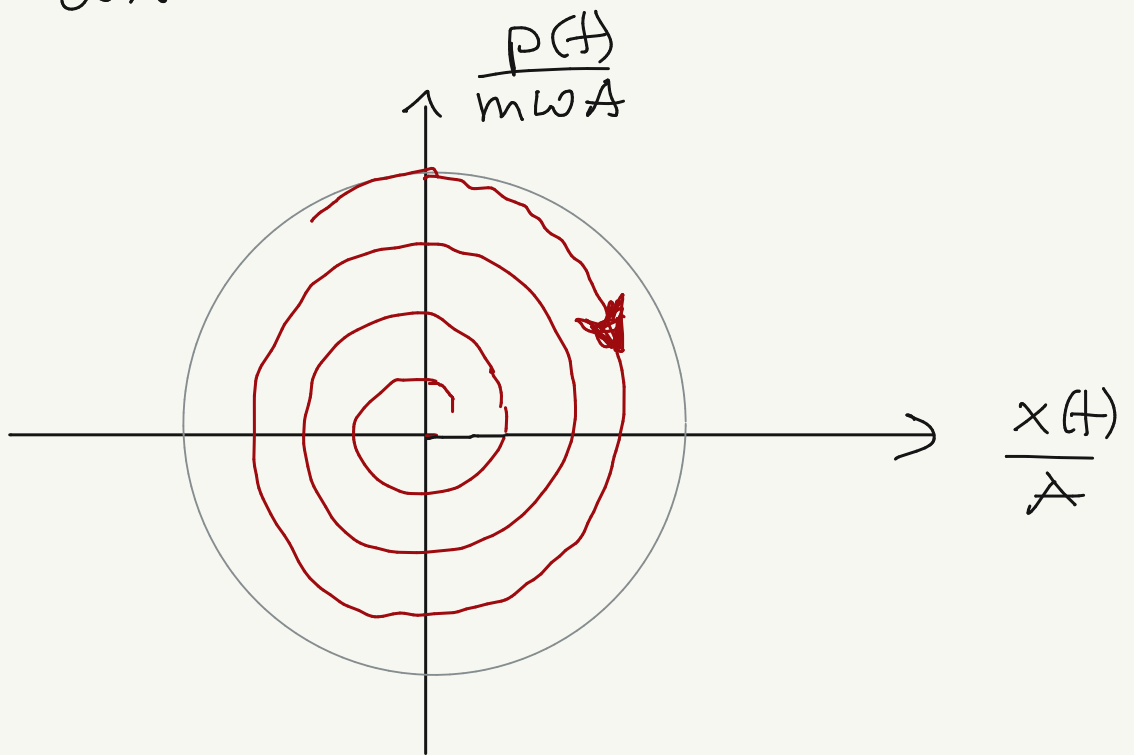
$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0) e^{-\gamma t}$$

allgemeine
Lösung

$$\ddot{x}(t) = -\omega A \sin(\omega t + \varphi_0) e^{-\gamma t} - \gamma A \cos(\omega t + \varphi_0) e^{-\gamma t}$$



Phasenraum



$$\omega_0 < \gamma$$

Kriechfall

$$\tilde{\omega} \equiv \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} > 0$$

$$x_1(t) = e^{+(\tilde{\omega} - \gamma)t}$$

$$x_2(t) = e^{(-\tilde{\omega} - \gamma)t}$$

oder

$$\tilde{x}_1(t) = \cosh(\tilde{\omega} t) e^{-\gamma t}$$

$$\tilde{x}_2(t) = \sinh(\tilde{\omega} t) e^{-\gamma t}$$

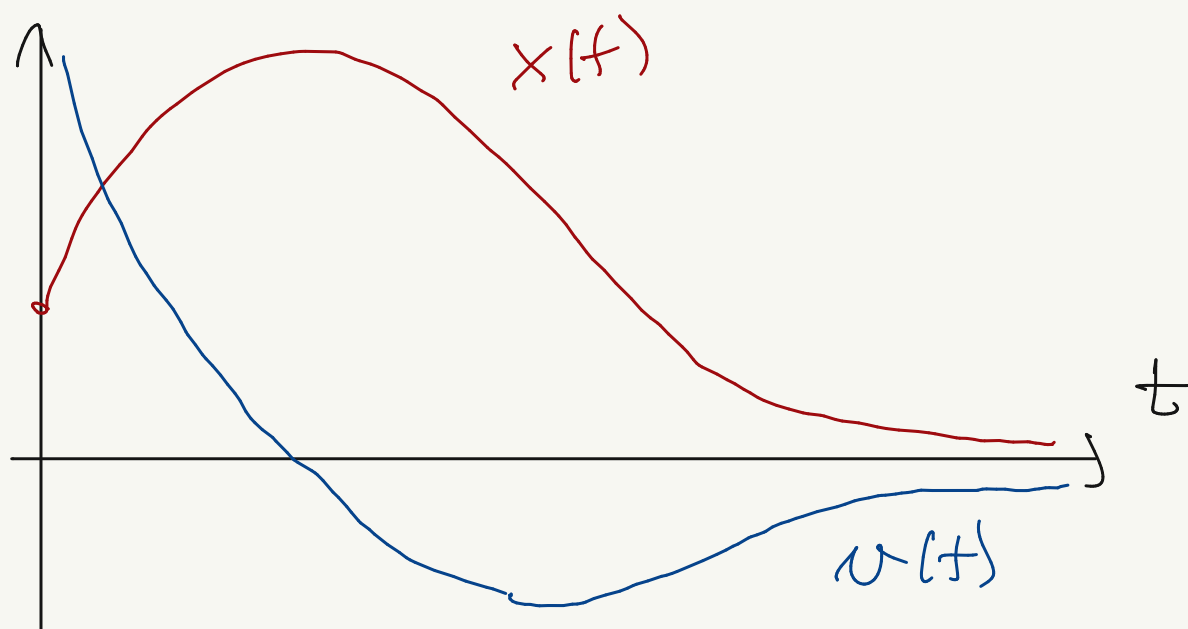
Zur Erinnerung $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

$\Rightarrow$

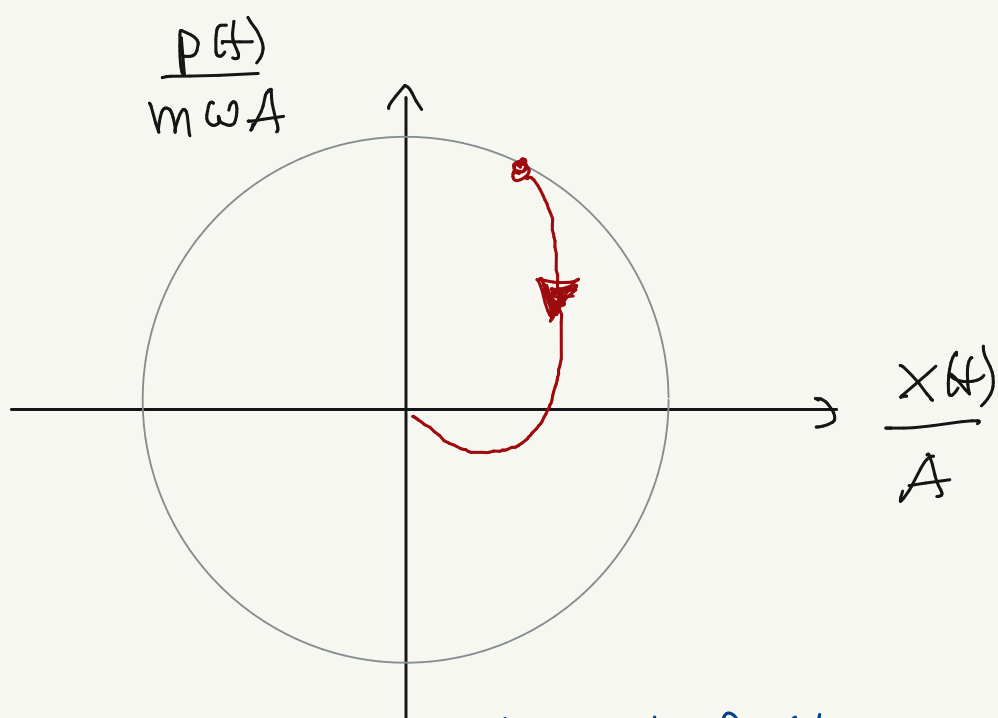
$$x(t) = A \sinh(\tilde{\omega} t + \varphi_0) e^{-\gamma t}$$

allg.
Lösung

$$\ddot{x}(t) = \tilde{\omega} A \cosh(\tilde{\omega} t + \varphi_0) - \gamma A \sinh(\tilde{\omega} t + \varphi_0)$$



Phasenraum



$$\omega_0 = \gamma$$

Aperiodischer Kriechfall

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\gamma$$

keine 2 unabhängigen Lösungen!

$$\underline{\underline{x_1(t) = e^{-\gamma t}}}$$

zweite Lösung?

Erinnern uns an letzte Stunde: 2. Lösung aus 1. Lösung

$$x_2(t) = x_1(t) \int_0^t \frac{w(t')}{x_1(t')^2} dt'$$

hier ist $\ddot{x} + \underbrace{2\gamma}_a \dot{x} + \gamma^2 x = 0 \Rightarrow w(t) = e^{-\gamma t}$

d.h. $\frac{w(t)}{x_1(t)^2} = 1 \Rightarrow x_2(t) = x_1(t)t$
 $\underline{\underline{x_2(t) = t e^{-\gamma t}}}$

$\Rightarrow$ generelle Eigenschaft von lin.-DGL mit konstanten Koeffizienten

$$C_n y^{(n)}(x) + C_{n-1} y^{(n-1)}(x) + \dots + C_1 y'(x) + C_0 y(x) = 0$$

Ansatz $y(x) = e^{\lambda x}$ liefert charakteristisches Polynom

$$C_n \lambda^n + C_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + C_1 \lambda + C_0 = 0$$

• falls alle n Wurzeln verschieden

$\Rightarrow$ n linear unabhängige Lösungen ✓

• falls p Wurzeln der charakteristischen Gleichung gleich

$(n-p)$ linear unabhängige Lösungen $y(x)$

weitere Lösungen durch Ansatz

$$x y(x), x^2 y(x), \dots, x^{(p-1)} y(x)$$

Lösung für Kriechfall

$$x(t) = (a + bt)e^{-\gamma t}$$

← 01.12.2020

VI.2 Erzwungene Schwingungen

Nun wollen wir einen harmonischen Oszillator unter der Wirkung einer periodischen Antriebskraft betrachten

$$\ddot{x}(t) + 2\gamma \dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = f_0 \cos(\Omega t)$$

Lösung am einfachsten indem wir komplexe Funktionen betrachten

$$\cos(\Omega t) = \operatorname{Re} [e^{i\Omega t}]$$

$$\Rightarrow x(t) = \operatorname{Re} [z(t)]$$

Lineare DGL! daher:

$$(*) \quad \ddot{z}(t) + 2\gamma \dot{z}(t) + \omega_0^2 z(t) = f_0 e^{i\Omega t}$$

Wir brauchen nur eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung

Ansatz $z(t) = A e^{i\Omega t}$

$$\dot{z} = i\Omega A e^{i\Omega t} = i\Omega z$$

$$\ddot{z} = -\Omega^2 A e^{i\Omega t} = -\Omega^2 z$$

einsetzen in (*)

$$\frac{1}{e^{i\Omega t}} \left| -\Omega^2 A e^{i\Omega t} + 2i\gamma\Omega A e^{i\Omega t} + \omega_0^2 A e^{i\Omega t} = f_0 e^{i\Omega t} \right|$$

$$(-\Omega^2 + 2i\gamma\Omega + \omega_0^2) A = f_0$$

[falls $\Omega = \omega_0$ und $\gamma = 0 \rightarrow$ Sonderfall]

$$A = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \Omega^2 + 2i\gamma\Omega} = |A| e^{-i\varphi}$$

komplexe Amplitude der erzwungenen Schwingung

spezielle Lösung

$$x(t) = |A| \cos(\Omega t - \varphi)$$

allg. Lösung

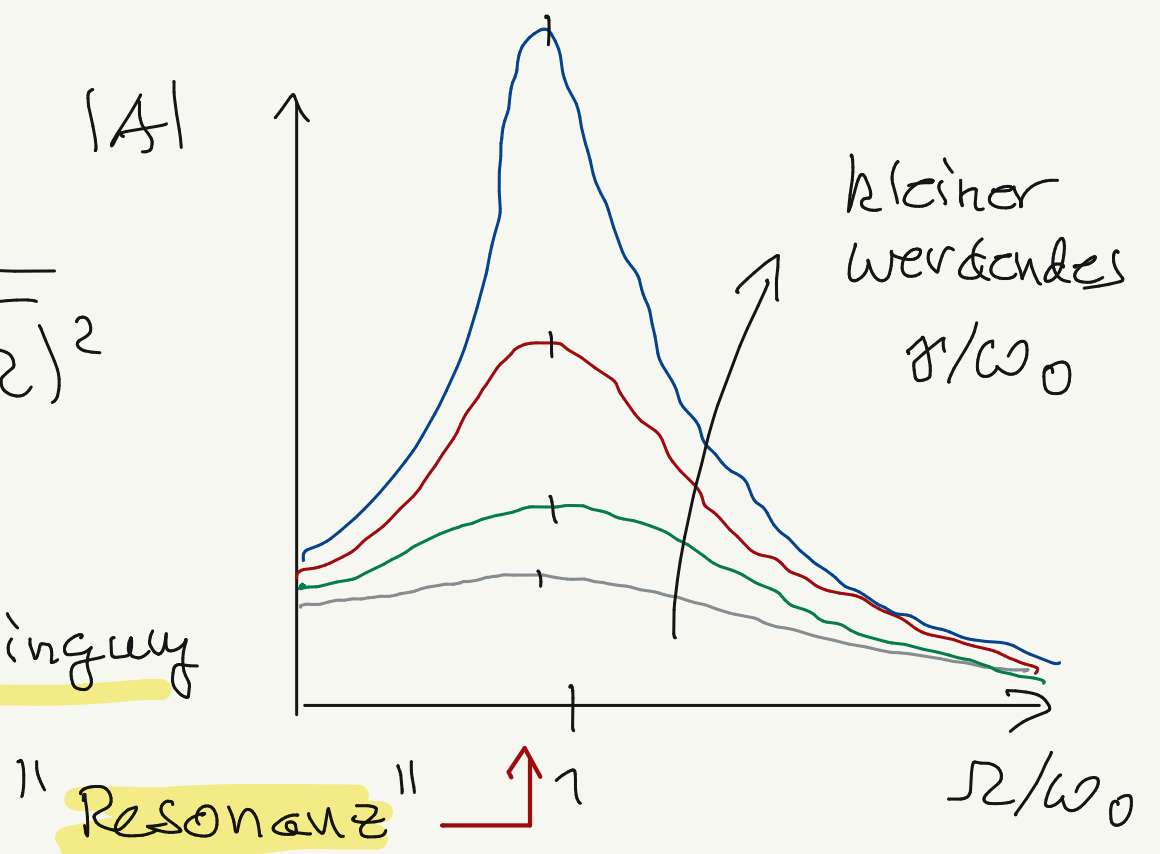
$$x(t) = \underbrace{C \cos(\omega_0 t + \varphi_0) e^{-\delta t}}_{\text{homogene Lsg}} + \underbrace{|A| \cos(\Omega t - \varphi)}_{\text{erzwungene Schwingung}}$$

homogene Lsg

erzwungene Schwingung

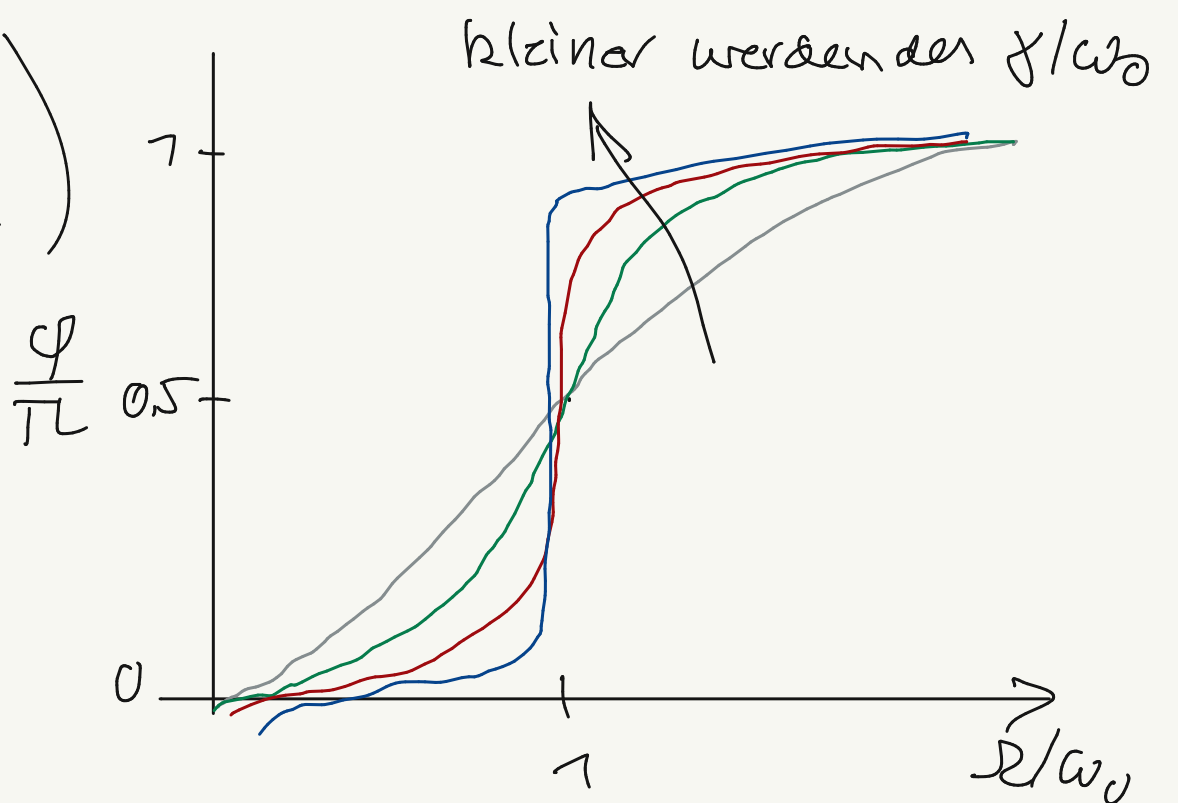
$$|A| = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\gamma\Omega)^2}}$$

Amplitude der erzwungenen Schwingung



$$\varphi = \arctan\left(\frac{2\gamma\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}\right)$$

Phasenverschiebung der erzwungenen Schwingung



Resonanzfrequenz

$$\frac{d|A|}{d\Omega} = 0 \quad (\text{Maximum})$$

$$\Omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}$$

Resonanzamplitude

$$|A|_R = \frac{f_0}{2\gamma\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} = \frac{f_0}{2\gamma\omega}$$

multiple Anregungsfrequenzen

$$(*) \quad \ddot{z} + 2\gamma \dot{z} + \omega_0^2 z = f_1 e^{i\Omega_1 t} + f_2 e^{i\Omega_2 t}$$

brauchen nur spezielle inhomogene Lösung

lineare DGL

$$z(t) = z_1(t) + z_2(t)$$

$$z_1(t) = A_1 e^{i\Omega_1 t}$$

$$z_2(t) = A_2 e^{i\Omega_2 t}$$

$$\dot{z}_1 = i\Omega_1 A_1 e^{i\Omega_1 t}$$

$$\dot{z}_2 = i\Omega_2 A_2 e^{i\Omega_2 t}$$

$$\ddot{z}_1 = -\Omega_1^2 A_1 e^{i\Omega_1 t}$$

$$\ddot{z}_2 = -\Omega_2^2 A_2 e^{i\Omega_2 t}$$

einsetzen in (*)

$$A_1 (-\Omega_1^2 + 2i\gamma\Omega_1 + \omega_0^2) e^{i\Omega_1 t}$$

$$+ A_2 (-\Omega_2^2 + 2i\gamma\Omega_2 + \omega_0^2) e^{i\Omega_2 t} = f_1 e^{i\Omega_1 t} + f_2 e^{i\Omega_2 t}$$

$$\Rightarrow A_1 = \frac{f_1}{\omega_0^2 - \Omega_1^2 + 2i\gamma\Omega_1} = |A_1| e^{i\varphi_1}$$

$$A_2 = \frac{f_2}{\omega_0^2 - \Omega_2^2 + 2i\gamma\Omega_2} = |A_2| e^{i\varphi_2}$$

$$z_s(t) = |A_1| e^{i(\Omega_1 t + \varphi_1)} + |A_2| e^{i(\Omega_2 t + \varphi_2)}$$

oder $|A_1| = |A_2| = |A|$

$$z_s(t) = |A| e^{i\left(\frac{\Omega_1 + \Omega_2}{2} t + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right)}$$

$$\cdot \left(e^{i\left(\frac{\Omega_1 - \Omega_2}{2} t + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right)} + e^{-i\left(\frac{\Omega_1 - \Omega_2}{2} t + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right)} \right)$$

$$z_s(t) = |A| e^{i \frac{\Omega_1 + \Omega_2}{2} t} e^{i \varphi_+} 2 \cos \left(\frac{\Omega_1 - \Omega_2}{2} t + \varphi_- \right)$$

$\uparrow$
Mittelfrequenz

$\uparrow$
Schwebungsfrequenz

- Was wenn $f(t)$ allgemeine Funktion der Zeit?
 $\rightarrow$ Fourierreihen (später)