

V. Gewöhnliche Differentialgleichungen

Grundgleichungen der Physik sind Differentialgleichungen
z.B. 2. Newtonsches Gesetz. Jetzt wollen wir uns
etwas systematischer mit deren Lösung beschäftigen.

Def: Gleichung in der eine unbekannte Fkt. $f(x)$
einer Variablen x und Ableitungen bis zur
 n -ten Ordnung $f^{(n)}(x)$ auftritt, heißt gewöhnliche
Differentialgleichung (DGL) n -ter Ordnung

kann sein in Form $(f(x) \rightarrow g(x))$

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad \text{implizite Form}$$

falls nach höchster Ableitung auflösbar

$$y^{(n)}(x) = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad \text{explizite DGL}$$

Lösungsfunktion $y(x)$ wird Lösung oder Integral
der DGL genannt

- Lösung da DGL nicht eindeutig;

➤ allgemeine Lösung von DGL n -ter Ordnung
enthält n voneinander unabhängiger
Parameter (Integrationskonstanten)

Bspl: $y'' = 1$

Lösung $y(x) = \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2$

Bem: bei nur implizit gegebener DGL zusätzliche
Freiheiten

Bspl: $(y'')^2 - 1 = 0$ $y'' = \pm 1$

$y(x) = \pm \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2$

► partikulärlösung oder spezielle Lösung

unabhängige Parameter werden Werte
zugeordnet

Anfangswertproblem

Randwertproblem

$$y^{(n)}(x) = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

n "Anfangsbedingungen"

n "Randbedingungen"

$$y(x_0) = y_0$$

$$y'(x_0) = y'_0$$

$$y''(x_0) = y''_0$$

⋮

$$y^{(n-1)}(x_0) = y^{(n-1)}_0$$

$$y(x_0) = y_0$$

$$y(x_1) = y_1$$

⋮

$$y(x_{n-1}) = y_{n-1}$$

Bspl.

$$m \ddot{x} = -m \omega^2 x$$

AB:

$$x(t_0) = x_0 \quad \dot{x}(t_0) = v_0$$

V.1 Lineare DGL erster Ordnung

allgemeine Form

$$y' = f(x) y + g(x)$$

$$y' - f(x) y = g(x)$$

Inhomogenität

$$y' - f(x) y = 0$$

homogene lin. DGL

Satz:

Die allgemeine Lösung einer inhomogenen linearen Differentialgleichung ist die Summe aus der allgemeinen Lösung $y_H(x)$ der homogenen linearen DGL und einer speziellen Lösung y_S der inhomogenen DGL

$$y = y_H(x) + y_S(x)$$

Bem.: gilt auch für lin. DGL höherer Ordnung

(A) Homogene lin. DGL 1. Ordnung

$$y'(x) = f(x) y(x)$$

Separation der Variablen

$$\frac{dy}{dx} = f(x) y \quad \Rightarrow$$

$$\underbrace{\frac{dy}{y}}_{\text{nur von } y \text{-abhängig}} = \underbrace{f(x) dx}_{\text{nur von } x \text{ abhängig}}$$

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int f(x) dx$$

$$\ln y - \ln y_0 = \int_{x_0}^x dx' f(x')$$

$$\Rightarrow y = \exp \left\{ \ln y_0 + \int_{x_0}^x dx' f(x') \right\}$$

Allgemeine
analytische
Lösung der
homogenen DGL

$$y = y_0 \exp \left\{ \int_{x_0}^x dx' f(x') \right\}$$

Das ist eine allgemeine (!) Lösung der homogenen lin. DGL 1. Ordnung mit dem freien Parameter y_0

Beispiel: (i) $y' = \sin(x) y(x)$

$$\frac{dy}{y} = \sin x dx \quad \ln y = C + \cos x$$

$$y = C \exp(\cos x)$$

$$(ii) \quad \dot{y}(t) = -i\omega y(t) \quad \omega > 0$$

$$\frac{dy}{y} = -i\omega dt \quad \ln y = C - i\omega t$$

$$y = C e^{-i\omega t}$$

(B) Bestimmung der speziellen Lösung der inhomogenen DGL:

Betrachten inhomogene DGL

$$(*) \quad y' = f(x)y + g(x)$$

homogene Lösung:

$$y_H(x) = C \exp \left\{ - \int dx f(x) \right\}$$

↓ "Variation der Konstanten"

$$y_c(x) = \underline{C(x)} \exp \left\{ - \int dx f(x) \right\}$$

$$\Rightarrow y_c'(x) = C'(x) \exp \left\{ - \int dx f(x) \right\} + C(x) f(x) \exp \left\{ - \int dx f(x) \right\}$$

Einsetzen in (*) liefert:

$$C' \exp(-\int dx f) + \underline{C f \exp(-\int dx f)} = \underline{f C \exp(-\int dx f)} + g(x)$$

→ Eliminierung des Terms $f(x)y$
in DGL

$\Rightarrow$

$$c'(x) \exp \left\{ -\int dx f(x) \right\} = g(x)$$

$\Rightarrow$

$$c(x) = \int dx g(x) \exp \left\{ -\int dx f(x) \right\}$$

liefert spezielle Lösung der inhomogenen DGL

$$y(x) = \left(c + \int dx g(x) e^{-\int dx f(x)} \right) e^{\int dx f(x)}$$

allg. Lösung bei DGL 1. Ordnung

Beispiel

$$\dot{x}(t) = ax(t) + b \cos(\omega t)$$

(i) allg. Lösung homogene DGL

$$\dot{x} = ax \quad \frac{dx}{x} = a dt \quad x = c e^{at}$$

(ii) Variation der Konstanten $x = c(t) e^{at}$

$$\dot{x} = \dot{c} e^{at} + a c e^{at} \quad \text{in DGL:}$$

$$\cancel{\dot{c} e^{at} + a c e^{at}} = \cancel{a c e^{at}} + b \cos(\omega t)$$

$$\dot{c}(t) = b \cos(\omega t) e^{-at}$$

$$c(t) = b \int dt \cos(\omega t) e^{-at}$$

(iii) allg. Lösg. da inhomogener DGL

$$\underline{\underline{x(t) = \left[C + b \int dt \cos(\omega t) e^{-\alpha t} \right] e^{\alpha t}}}$$

- alternativ kann auch durch andere Methoden eine spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung bestimmt werden; z.B. durch "Katen" oder einen geschickten Ansatz:

Bspl $\dot{x} = ax + be^{i\omega t}$

Ansatz $x_s(t) = A e^{\lambda t}$

$$\dot{x}_s = \lambda A e^{\lambda t} \quad \text{in DGL}$$

$$\lambda A e^{\lambda t} = a A e^{\lambda t} + b e^{i\omega t}$$

$$\leadsto \underline{\lambda = i\omega} \quad A = \underline{\underline{\frac{b}{i\omega - a}}}$$

V.2 Lineare DGL 2. Ordnung

Für physikalische Probleme sind lineare DGL 2. Ordnung von großem Interesse

allgemeine (explizite) Form

$$\underbrace{y''(x) + a(x)y'(x) + b(x)y(x)}_{=0} = \underbrace{g(x)}$$

$\Rightarrow$ homogene DGL

Inhomogenität

(A) homogene lin. DGL 2. Ordnung

$$(*) \quad y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$$

Satz: Wenn $y_1(x)$ und $y_2(x)$ Lösungen von $(*)$ sind
so ist es auch jede Superposition,

Superpositionsprinzip lineare DGL

$$y_1(x), y_2(x) \text{ Lsg} \Rightarrow y(x) = c y_1(x) + d y_2(x) \text{ Lsg}$$

Bew: trivial (Einsetzen); Man gilt:

Die Lösungen der homogenen linearen DGL 2. Ordnung
bilden einen 2-dimensionalen linearen Raum

Wronski-Determinante

Seien $y_1(x)$ und $y_2(x)$ Lösungen von $(*)$

$$W(x) \equiv y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)$$

es gilt

$$\frac{dW(x)}{dx} = -a(x)W(x) \quad (**)$$

Beweis: (Einschen)

$$\begin{aligned} W' &= (y_1 y_2' - y_1' y_2)' = \cancel{y_1' y_2'} + y_1 y_2'' - \cancel{y_1' y_2'} - y_1'' y_2 \\ &= y_1 y_2'' - y_1'' y_2 \stackrel{\text{DGL}}{=} y_1(-a y_2' - b y_2) - (-a y_1' - b y_1) y_2 \\ &= -a(y_1 y_2' - y_1' y_2) - \cancel{b y_1 y_2} + \cancel{b y_1 y_2} = -aW \end{aligned}$$

Lösung von (**) mit AB

$$W(x) = W(x_0) \exp \left\{ - \int_{x_0}^x a(x') dx' \right\}$$

falls $a(x)$ reell $\Rightarrow \exp \left(- \int_{x_0}^x a(x') dx' \right) > 0$

d.h.

falls $W(x_0) \neq 0 \Rightarrow W(x) \neq 0$

falls $W(x_0) = 0 \Rightarrow W(x) = 0$

$W(x_0)=0$ bzw. $W(x)=0$ heißt, daß die Lösungen $y_1(x)$ und $y_2(x)$ linear abhängig sind!

$$W(x)=0 \quad y_1(x)y_2'(x) = y_1'(x)y_2(x)$$

$$\Rightarrow \frac{y_1'(x)}{y_1(x)} = \frac{y_2'(x)}{y_2(x)} \quad \Rightarrow \ln y_1(x) = \ln y_2(x) + \text{konst}$$

Zwei Lösungen $y_1(x)$ und $y_2(x)$ einer homogenen linearen DGL sind linear abhängig, falls die Wronski-Determinante verschwindet.
Andernfalls sind sie linear unabhängig.

Es gilt folgende, auf den ersten Blick erstaunliche Eigenschaft:

kennt man eine Lösung $y(x)$ von (*)
kann man stets eine zweite linear unabhängige Lösung konstruieren!

$y_1(x)$ Lsg $\Rightarrow$ linear unabhängige Lösung
muß Wronski-Determinante $\neq 0$
liefern an einem Punkt x_0
(dann ja auch für alle anderen)

$$y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x) = W(x)$$

$W(x)$ ist Lösung von (***) d.h. $W(x) = e^{-\int dx' a(x')}$

$\Rightarrow$

$$y_2'(x) - \frac{y_1'(x)}{y_1(x)} y_2(x) = \frac{W(x)}{y_1(x)}$$

inhomog. lineare DGL 1. Ordnung für $y_2(x)$

$\Rightarrow$ partikuläre Lösg

$$y_2(x) = y_1(x) \int dx' \frac{W(x')}{y_1^2(x')}$$

(B) Lösung der inhomogenen linearen DGL 2. Ordnung

Betrachten inhomogene DGL 2. Ordnung für Ort eines Massenpunktes als Fkt. der Zeit

$$\ddot{x} + a(t)\dot{x} + b(t)x = f(t)$$

Anfangsbedingungen

$$x(t_0) = x_0 \quad \dot{x}(t_0) = v_0$$

$\Rightarrow$ allg. Lösung = Summe allg. homog. Lösung
(2 linear unabhängige!)
+ spezielle Lösg der inhomog. Gl.