

Beispiel:

(i) isothermer harmonischer Oszillator $V(r) = \frac{m}{2} \omega^2 r^2$

$$\vec{r} \cdot \vec{\nabla} V = 2V$$

$$\underline{\underline{\overline{T}^t = \overline{V}^t}}$$

(ii) Coulomb- bzw. Gravitationspotential

$$V(r) = -\frac{\alpha}{r}$$

$$\vec{r} \cdot \vec{\nabla} V = -V$$

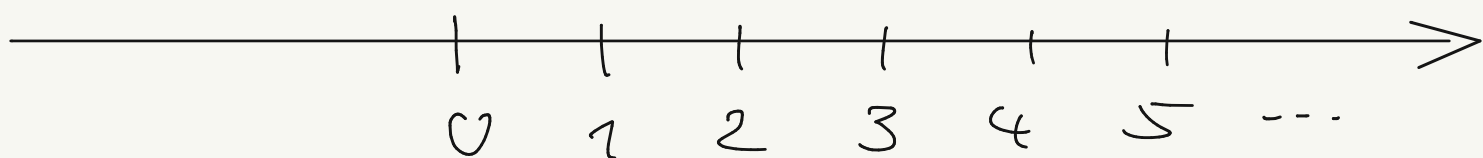
$$\underline{\underline{2\overline{T}^t = -\overline{V}^t}}$$

IV. Komplexe Zahlen

IV.1 Zahlensysteme; komplexe Zahl

• natürliche Zahlen

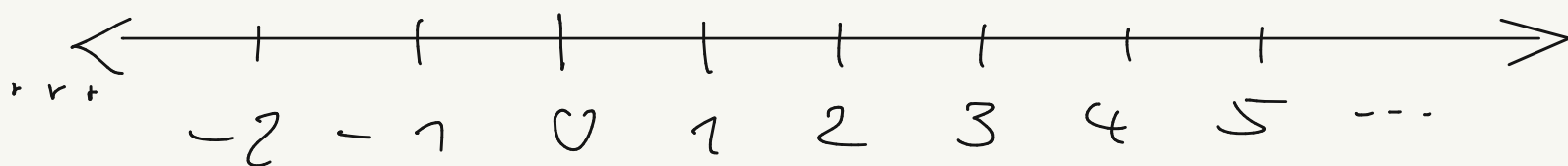
$$0, 1, 2, 3, \dots \in \mathbb{N}$$



➡ Addition ausführbar, Subtraktion meist immer
⇓

• ganze Zahlen

$$\dots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots \in \mathbb{Z}$$



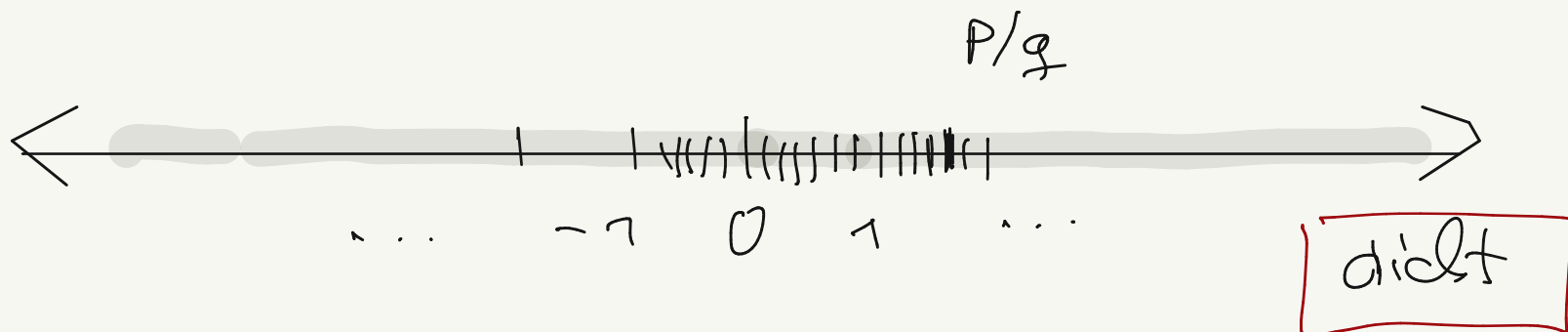
➤ Addition + Subtraktion und Multiplikation ausführbar, Division nicht immer

⇓

• rationale Zahlen

$$\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$$

$$p, q \in \mathbb{Z}$$



➤ Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division (außer 0) und Potenzieren durchführbar

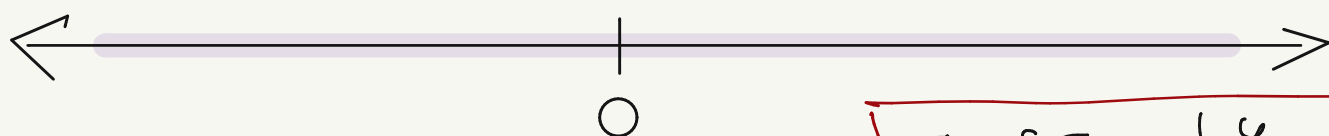
$$a \in \mathbb{Q}_+ \rightarrow a^2 \in \mathbb{Q}_+$$

d.h. $a \geq 0$

Umkehrung nicht; d.h. $b^2 = a$ mit $a \in \mathbb{Q}_+$ hat keine Lösung b

• reelle Zahlen

$$x \in \mathbb{R}$$



ausgeschöpft!

► Quadratwurzel aus positiven reellen Zahlen definiert, aber $\nexists$ Lösung der Gleichung

$$x^2 = -1$$

Zahlengerade ausgeschöpft $\Rightarrow$ 2 dim!

• komplexe Zahlen

$$z \in \mathbb{C}$$

geordnete Paar (2D) reeller Zahlen

(u, v)
"Realteil" "Imaginarteil"

reelle Zahlen $(u, 0)$

imaginäre Einheit $(0, 1) \equiv i$

Verknüpfung

$$i^2 = -1$$

$\Rightarrow$ Lösung von $x^2 = -1$

Jedes Polynom n -ten Grades mit $a_i \in \mathbb{C}$

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n = P_n(z)$$

besitzt genau n Lösungen von

$$P_n(z) = 0 \quad (\text{Nullstellen})$$

$z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}$, d.h.

$$P_n(z) = (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n)$$

Fundamentalsatz der Algebra

$$z = u + i^0 v$$

$$u = \operatorname{Re}[z]$$

Realteil von z

$$v = \operatorname{Im}[z]$$

Imaginärteil von z

$$z_1 = (u_1, v_1) \quad z_2 = (u_2, v_2)$$

Addition

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (u_1 + u_2, v_1 + v_2) \\ &= u_1 + i v_1 + u_2 + i v_2 \\ &= (u_1 + u_2) + i (v_1 + v_2) \end{aligned}$$

Multiplikation

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (u_1 + i v_1)(u_2 + i v_2) \\ &= u_1 u_2 + i^2 v_1 v_2 + i v_1 u_2 + i u_1 v_2 \\ &= u_1 u_2 - v_1 v_2 + i (v_1 u_2 + u_1 v_2) \end{aligned}$$

Def: Zu jeder komplexen Zahl $z = a + ib$ kann man eine komplex konjugierte Zahl $z^* = a - ib$ (manchmal auch $\bar{z}$) definieren

• es gilt offensichtlich

$$(i) \quad \operatorname{Re}[z^*] = \operatorname{Re}[z] \quad \operatorname{Im}[z^*] = -\operatorname{Im}[z]$$

$$z = a + ib \quad z^* = a - ib$$

$$\operatorname{Re}[z] = \frac{z + z^*}{2}$$

$$\operatorname{Im}[z] = \frac{z - z^*}{2i}$$

$$\begin{aligned} (ii) \quad \overline{z \cdot z^*} &= (a + ib)(a - ib) \\ &= a^2 + \cancel{ib} \cancel{a} - \cancel{ia} \cancel{b} - i^2 b^2 \\ &= \overline{a^2 + b^2} \geq 0 \end{aligned}$$

• Division komplexer Zahlen $z = a + ib$
 $w = u + iv$

$$\frac{z}{w} = \frac{a + ib}{u + iv} = \frac{z}{w} \frac{w^*}{w^*} = \frac{(a + ib)(u - iv)}{(u + iv)(u - iv)}$$

$$= \frac{au + bv + i(bu - av)}{u^2 + v^2}$$

$$= \frac{au + bv}{u^2 + v^2} + i \frac{bu - av}{u^2 + v^2}$$

Bspl: $z_1 = 1 + i \quad z_2 = 2 + i$

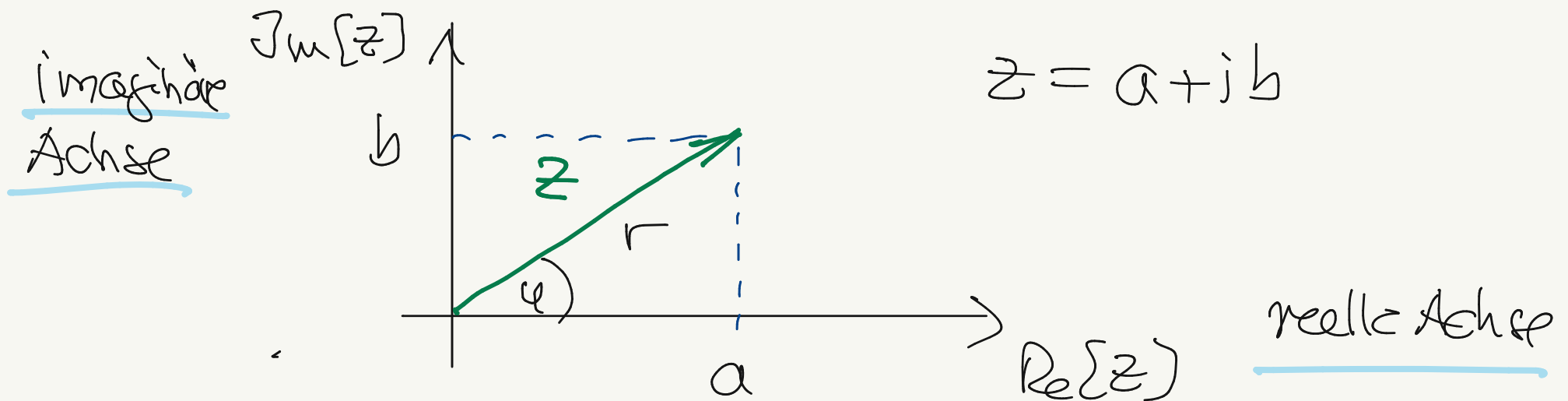
$$z_1 + z_2 = 3 + 2i$$

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (1 + i)(2 + i) \\ &= 2 + 2i + i + i^2 \\ &= 1 + 3i \end{aligned}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 z_2^*}{z_2 z_2^*} = \frac{(1 + i)(2 - i)}{2^2 + 1^2} = \frac{2 + 2i - i - i^2}{5} = \frac{3 + i}{5}$$

IV.2 Polardarstellung komplexer Zahlen

nützliche Darstellung: komplexe Zahlenachse (2D!)



r Abstand vom Ursprung oder Betrag von z
 φ Polwinkel gegen reelle Achse

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\text{Re}(z)^2 + \text{Im}(z)^2} = \sqrt{z \cdot z^*}$$

$$a = \text{Re}[z] = r \cos \varphi \quad b = \text{Im}[z] = r \sin \varphi$$

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = r e^{i\varphi}$$

Euler Formel

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

Beweis: Taylorreihe

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0) (x - x_0)^n \quad (\text{falls existiert})$$

$$X_0 = 0$$

$$\begin{aligned}\cos'(x) &= \sin x \\ \sin'(x) &= -\cos x\end{aligned}$$

$$(e^{2x})' = 2e^{2x}$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \dots$$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \dots$$

$$\begin{aligned}e^{ix} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (ix)^n \\ &= \underbrace{1}_{\text{red}} + \underbrace{ix}_{\text{green}} + \underbrace{\frac{1}{2!}(ix)^2}_{\text{red}} + \underbrace{\frac{1}{3!}(ix)^3}_{\text{green}} + \underbrace{\frac{1}{4!}(ix)^4}_{\text{red}} + \dots \\ &= 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \dots \\ &\quad + i \left(x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \dots \right) \\ &= \cos x + i \sin x \quad \square\end{aligned}$$

$$\cos x = \operatorname{Re}[e^{ix}] = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$\sin x = \operatorname{Im}[e^{ix}] = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

Satz von Moivre

$$(e^{i\varphi})^n = e^{in\varphi} = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^n \\ = \cos(n\varphi) + i(\sin n\varphi)$$

Wichtige Anwendung: Additionstheoreme der Winkelfunktionen

$$e^{i(\alpha+\beta)} = \cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta) \\ = e^{i\alpha} e^{i\beta} = (\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta) \\ = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\ + i(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \quad \text{etc.}$$

Polar Darstellung für Multiplikation / Division komplexer Zahlen

$$z = r e^{i\varphi} = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

$$z^* = r(\cos\varphi - i\sin\varphi) = r(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi))$$

d.h.

$$z = r e^{i\varphi} \Leftrightarrow z^* = r e^{-i\varphi}$$

• Multiplikation

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 e^{i\varphi_1} r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

• Division

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

$$\Rightarrow |z_1 z_2| = |r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}| = r_1 r_2 = |z_1| |z_2|$$

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \left| \frac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}} \right| = \left| \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} \right| = \frac{r_1}{r_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

IV. 3 Komplexe Wurzeln

am einfachsten mithilfe der Polardarstellung

$$z = r e^{i\varphi}$$

$$\omega = \sqrt[n]{z} = ?$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r e^{i\varphi}} = \sqrt[n]{r} r^{i\varphi/n} = |\omega| e^{i\varphi}$$

mit

$$\begin{aligned} |\omega| &= \sqrt[n]{r} \\ \varphi &= \frac{\varphi}{n} \end{aligned} \quad \omega = \sqrt[n]{z}$$

aber $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i(\varphi+2\pi)} = e^{i(\varphi+4\pi)}$
etc.

da $\cos(\varphi+2\pi) = \cos\varphi$
 $\sin(\varphi+2\pi) = \sin\varphi$

$\Rightarrow$ Es existieren n (i.A.) verschiedene
Wurzeln $\sqrt[n]{z}$

$$z = re^{i\varphi}$$

$$\omega = \sqrt[n]{z}$$

$$|\omega| = \sqrt[n]{r}$$

$$\varphi_m = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi m}{n}$$

$$m = (0, 1, 2, \dots, n-1)$$

Bem $m=n$ liefert $\varphi_n = \varphi_0 + 2\pi$ identisch!

Bspl.: Wurzeln von 1 $z = 1$

$$z = 1 \quad \omega = \sqrt[n]{z} = e^{\frac{2\pi i m}{n}}$$

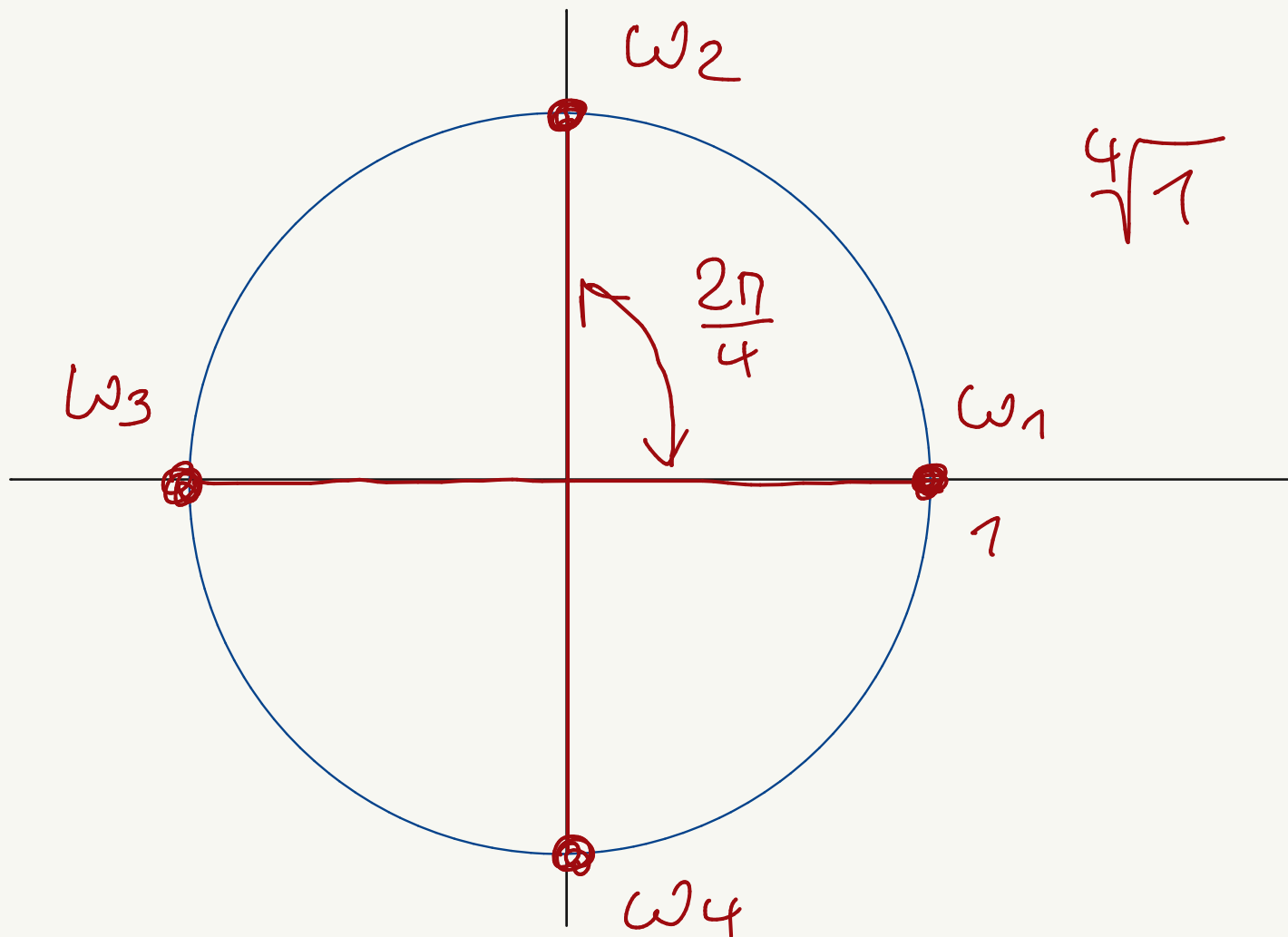
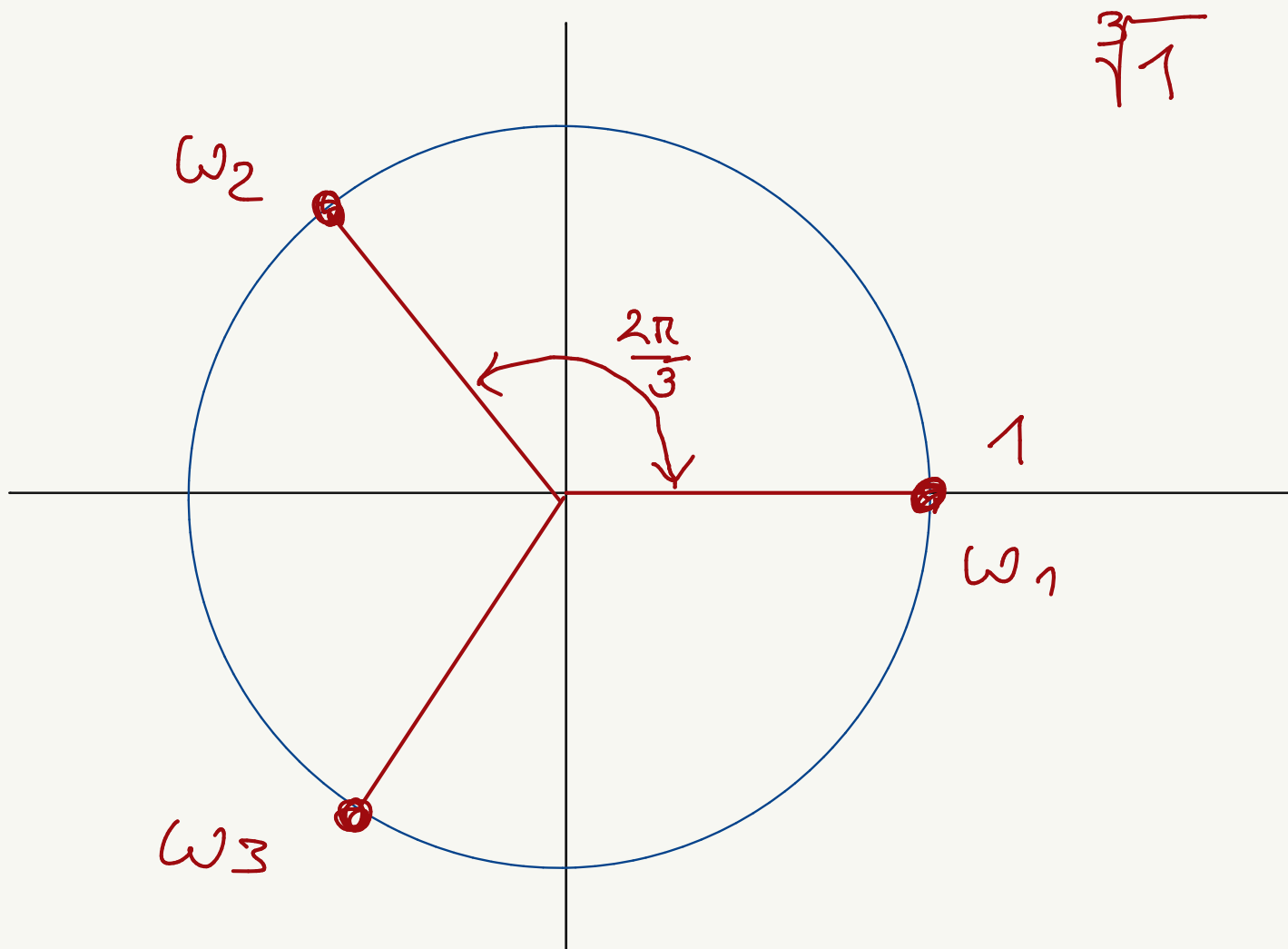
$$n=2 \quad \omega_1 = 1 \quad \omega_2 = e^{\pi i} = -1$$

$$n=3 \quad \omega_1 = 1 \quad \omega_2 = e^{\frac{2\pi i}{3}} \quad \omega_3 = e^{\frac{4\pi i}{3}}$$

$$n=4 \quad \omega_1 = 1 \quad \omega_2 = e^{\frac{2\pi i}{4}} = i$$

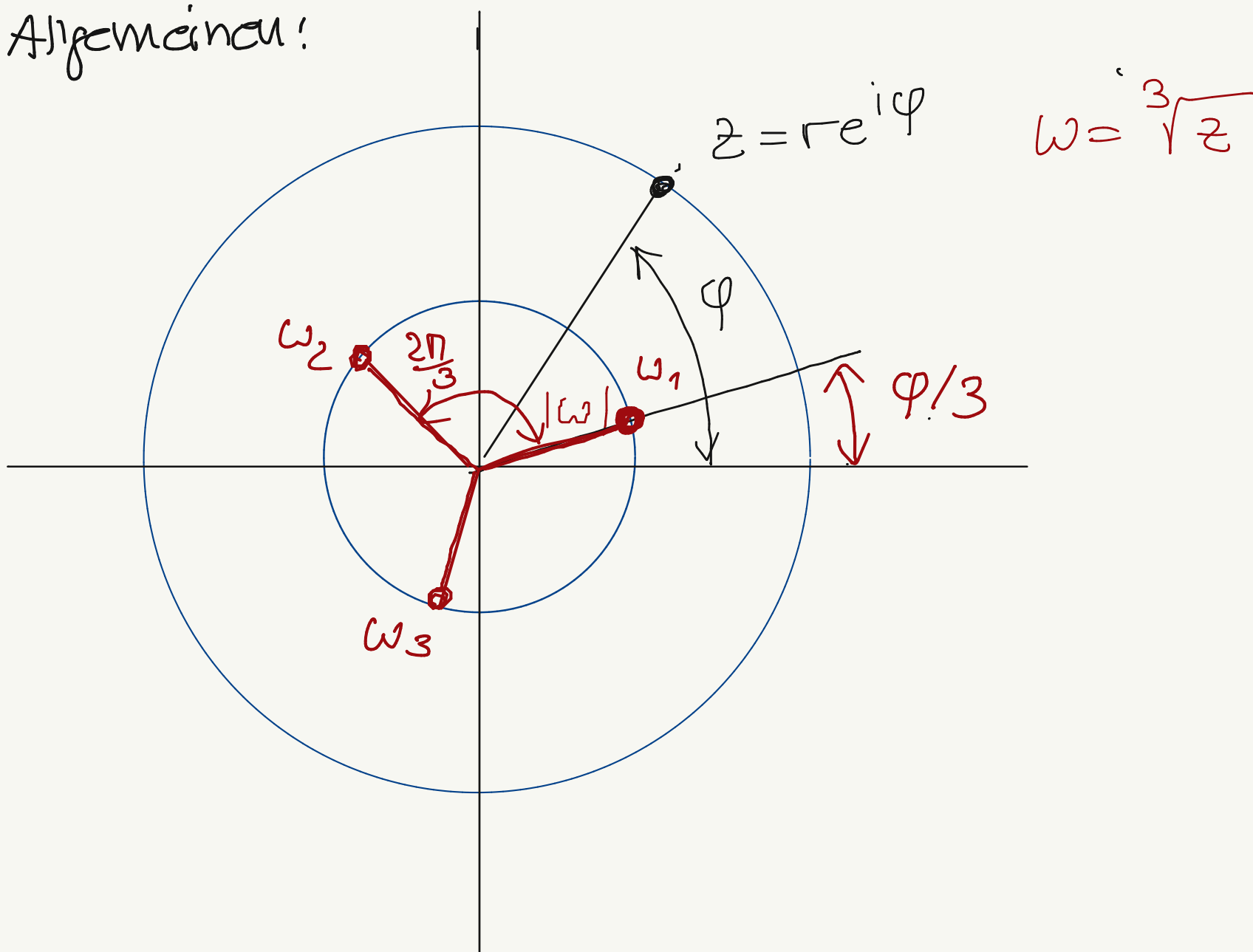
$$\omega_3 = e^{\pi i} = -1 \quad \omega_4 = e^{\frac{6\pi i}{4}} = -i$$

geometrische Deutung



$\Rightarrow$ Fundamentalsatz $\omega^n - 1 = 0$ hat n Lösungen ω

Im Allgemeinen:



IV.4 Logarithmus

$$\omega = ? \ln z$$

$$z = re^{i\varphi} = re^{i(\varphi + 2\pi m)}$$

$$m \in \mathbb{Z}$$

mit Polardarstellung

$$\omega = \ln(re^{i\varphi}) = \ln r + \ln e^{i(\varphi + 2\pi m)}$$

$$\omega = \ln r + i\varphi + \underline{2\pi m i}$$

$\Rightarrow$ Logarithmus ist vieldeutig