

$$\frac{d}{dt} [V+T] = \frac{d}{dt} E = \vec{F}_{\text{diss}} \cdot \vec{v}$$

Die Änderung der Energie ist gleich der (negativen) Leistung dissipativer Kräfte

Bem.: $\exists$ energiehaltende aber nicht konservative Kräfte, z.B. Lorentzkraft in konstantem Magnetfeld

$$\vec{F}_L = q \vec{v} \times \vec{B} \neq -\vec{\nabla} V$$

$$\text{aber } \vec{F}_L \cdot d\vec{r} = q \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{B} \right) \cdot d\vec{r} \stackrel{!}{=} 0$$

spatprodukt mit
zwei parallelen Vektoren

10.11.2010



III.4 Zur Integration eindimensionaler Probleme mit ortsabhängiger Kraft

hier 1D und nur ortsabhängige Kraft

$$\vec{F} = F(x) \vec{e}_x$$

$$\Rightarrow F(x) = - \frac{dV(x)}{dx}$$

$$\text{es gilt } \frac{d}{dt} E = \frac{d}{dt} (T+V) = 0$$

$$E = \frac{m}{2} \dot{x}^2 + V(x) = \text{konst.}$$

Diese Gleichung kann sofort integriert (gelöst) werden

$$\frac{m}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 = E - V(x) \quad \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2(E - V(x))}{m}}$$

$$\frac{dt}{dx} = \sqrt{\frac{m}{2(E - V(x))}}$$

$$\int_{t_0}^t dt = \int_{x_0}^x \frac{dx'}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x'))}}$$

$$t - t_0 = \int_{x_0}^x \frac{dx'}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x'))}}$$

allgemeine
(implizite)
Lösung
1-dimensionalen
Problems

- Anfangsbedingungen

$$X(t_0) = X_0$$

$$\dot{X}(t_0) \Leftrightarrow E = \frac{m}{2} \dot{X}(t_0)^2 + V(X_0)$$

- wichtige Folgerungen

(i) erlaubter Bereich der Bewegung

$$E - V(x) \geq 0$$

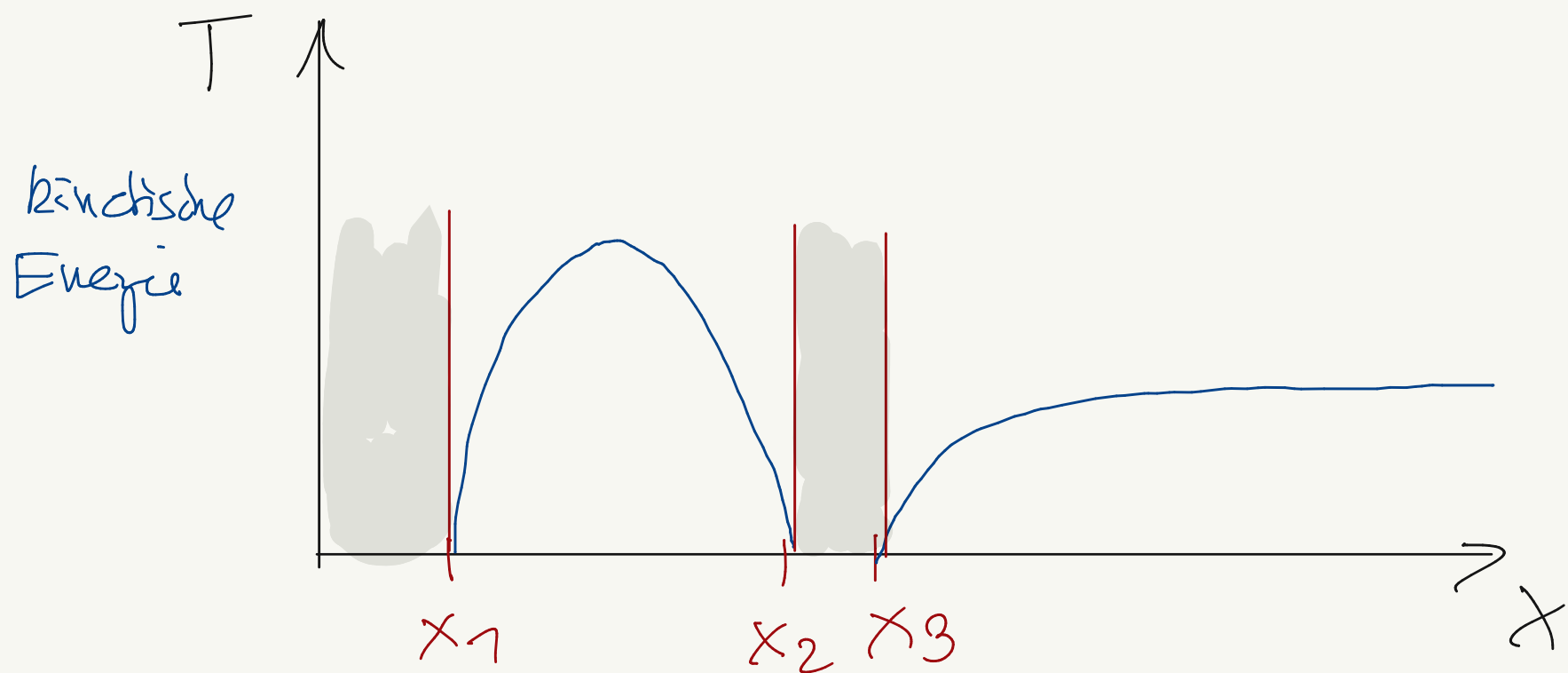
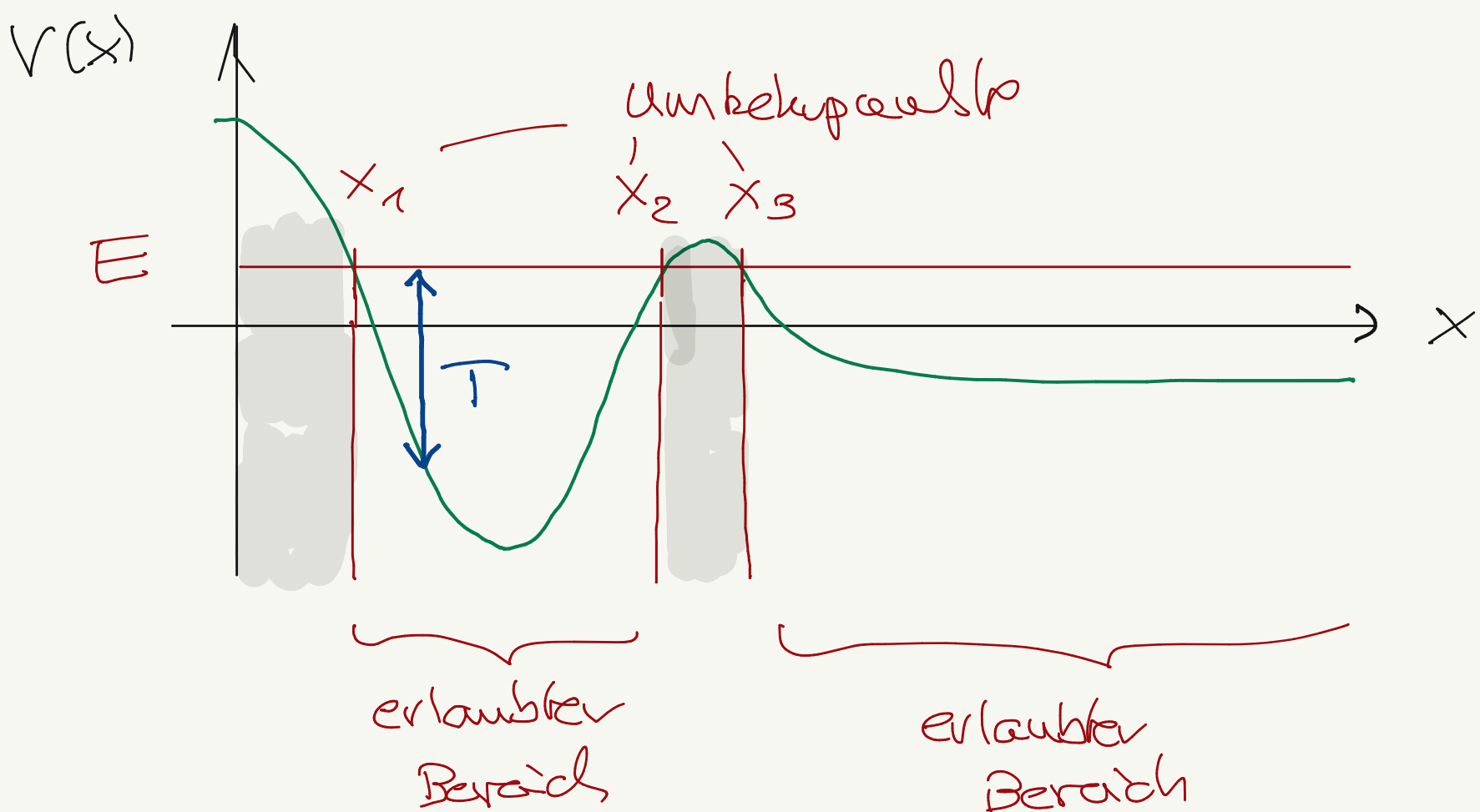
(ii) Umkehrpunkte bzw. asymptotische Punkte der Bewegung

$$E - V(x_0) = 0$$

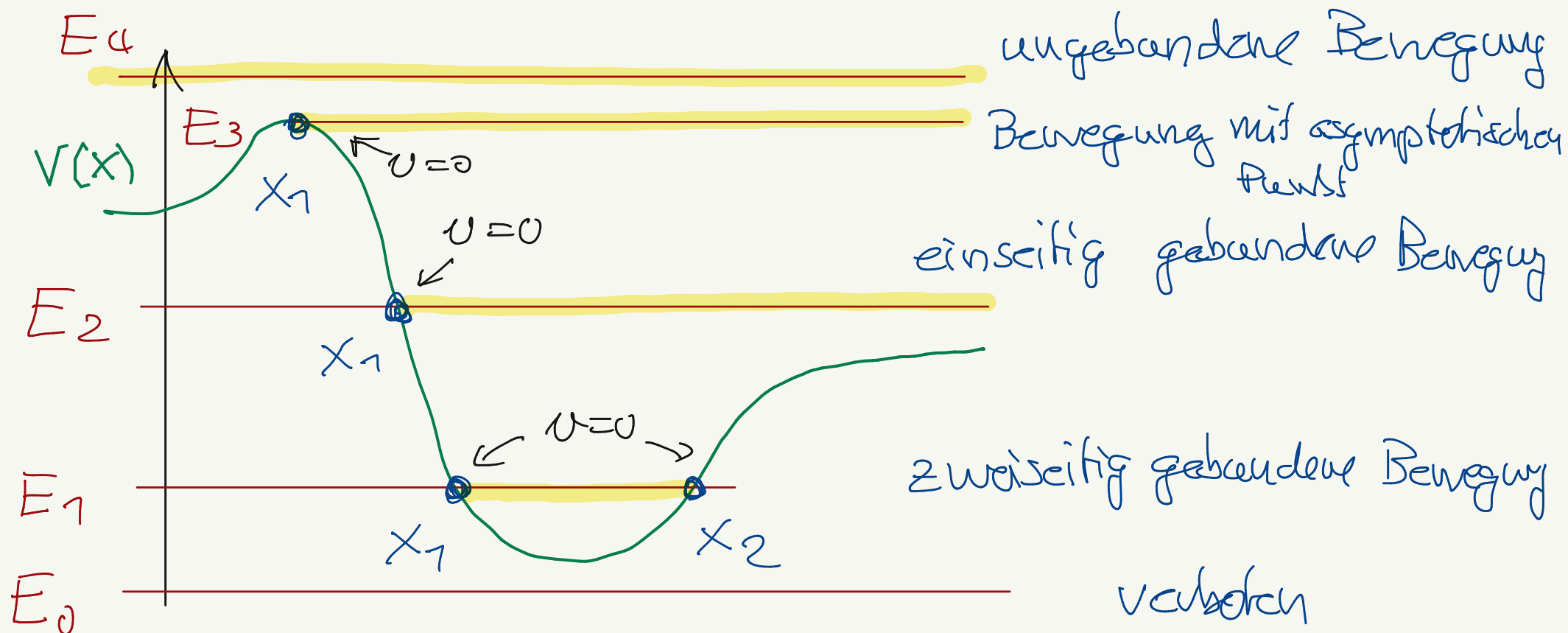
An den Umkehrpunkten verschwindet die kinetische Energie

$$T(x_0) = \frac{m}{2} \dot{x}_0^2 = E - V(x_0) = 0$$

$$\Rightarrow \dot{x}_0 = 0$$



Klassifikation von Bewegungen



Bem: (i) asymptotischer Punkt

$$T=0 \Leftrightarrow \dot{x}=0$$

$$\text{und } \frac{dV}{dx}=0 \Rightarrow m\ddot{x} = -\frac{dV}{dx}=0$$

Bewegung kommt zum Stillstand!
 In der Nähe des Maximums ($\frac{dV}{dx}=0$) gilt
 Taylorentwicklung

$$V(x) \approx V(x_0) - \frac{1}{2}m\alpha^2(x-x_0)^2$$

$$= E - \frac{1}{2}m\alpha^2(x-x_0)^2 \quad (T=0)$$

Zeit bis zum Erreichen des asymptotischen Punktes
 $-\varepsilon$

$$\tau = \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} dx \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m}(E-V(x))}} \approx \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} dx \frac{1}{\alpha(x-x_0)} = \frac{1}{\alpha} \ln \frac{1}{\varepsilon}$$

Für $\varepsilon \rightarrow 0$ geht $\ln \frac{1}{\varepsilon} \rightarrow \infty$!

D.h. es braucht unendlich lange bis der Massenpunkt am Maximum angekommen ist!

(ii) beidseitig gebundene Bewegung

→ periodische Bewegung

Periode $\frac{T_P}{2} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m} (E - V(x))}}$

wobei $V(x_1) = V(x_2) = E$

III. 5 Der Phasenraum

Nun wollen wir allgemeine Kräfte in 1D betrachten, die auch Geschwindigkeits- (impulghängig) sein können.

Bei gegebener Kraft

$$\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = \vec{F}(\vec{r}, \vec{p}, t)$$

und Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} \vec{r}(t_0) &= \vec{r}_0 \\ \dot{\vec{r}}(t_0) &= \vec{v}_0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} \vec{r}(t_0) &= \vec{r}_0 \\ \vec{p}(t_0) &= \vec{p}_0 = m \vec{v}_0 \end{aligned}$$

kann die Bewegung stets eindeutig aus der Lösung zweier gekoppelter Differentialgleichungen 1. Ordnung bestimmt werden

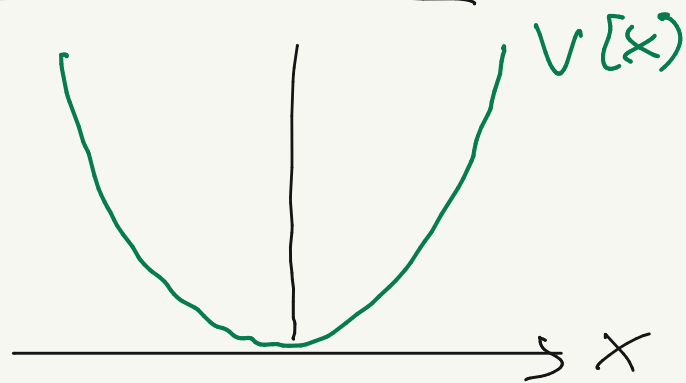
$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \vec{r} \\ \vec{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{p}/m \\ \vec{F}(\vec{r}, \vec{p}, t) \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \vec{r}(t_0) \\ \vec{p}(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{r}_0 \\ \vec{p}_0 \end{pmatrix}$$

Def: Die Menge der Punkte $(\vec{r}(t), \vec{p}(t)) \in \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3 = \mathcal{P}$ bildet den Phasenraum

- Trajektorien im Phasenraum charakterisieren die Bewegung vollständig.
- Die Lösung $(\vec{r}(t), \vec{p}(t))$ mit $(\vec{r}(t_0) = \vec{r}_0, \vec{p}(t_0) = \vec{p}_0)$ heißt Integralkurve des Kraftfeldes $\vec{F}$

Bspl.: (i) harmonischer Oszillator in 1D

$$V(x) = \frac{1}{2} m \omega^2 x^2$$



$$\vec{F}(x) = -\frac{dV(x)}{dx} \vec{e}_x = -m\omega^2 x \vec{e}_x$$

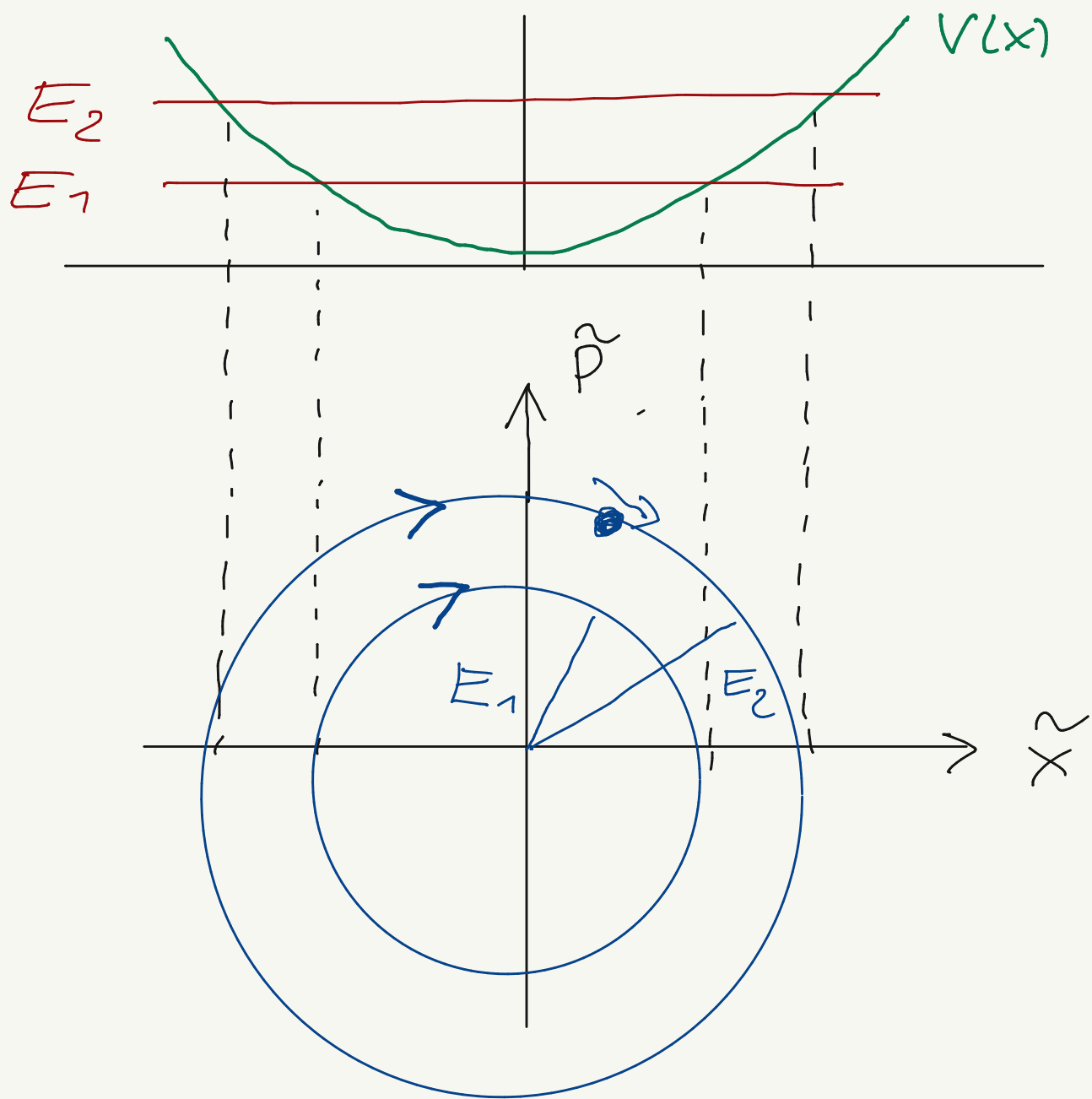
$$E = \frac{m}{2} v^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} x^2 = \text{const}$$

skalierte Variable

$$\tilde{x} = \omega \sqrt{m} x$$

$$\tilde{p} = \frac{p}{\sqrt{m}}$$

$$\Rightarrow E = \frac{1}{2} (\tilde{x}^2 + \tilde{p}^2) \quad \text{Kreisgleichung!}$$

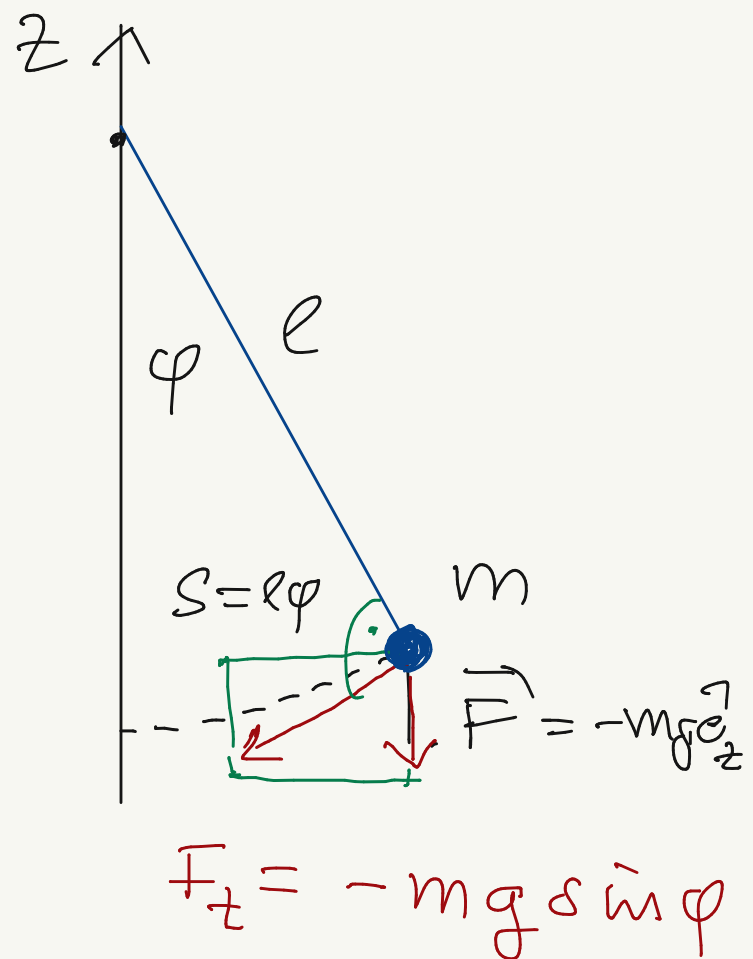


(ii) mathematisches Pendel im Schwerfeld

$$T = T(\dot{\varphi}) = \frac{1}{2} m \dot{s}^2 = \frac{1}{2} m e^2 \dot{\varphi}^2$$

$$F_t = F_t(\varphi) = -mg \sin \varphi$$

$$\begin{aligned} V(\varphi) &= \int_0^s ds' \, mg \sin \varphi' \\ &= \int_0^\varphi d\varphi' \, m g e \sin \varphi' \\ &= m g e (1 - \cos \varphi) \end{aligned}$$



Energiehaltung

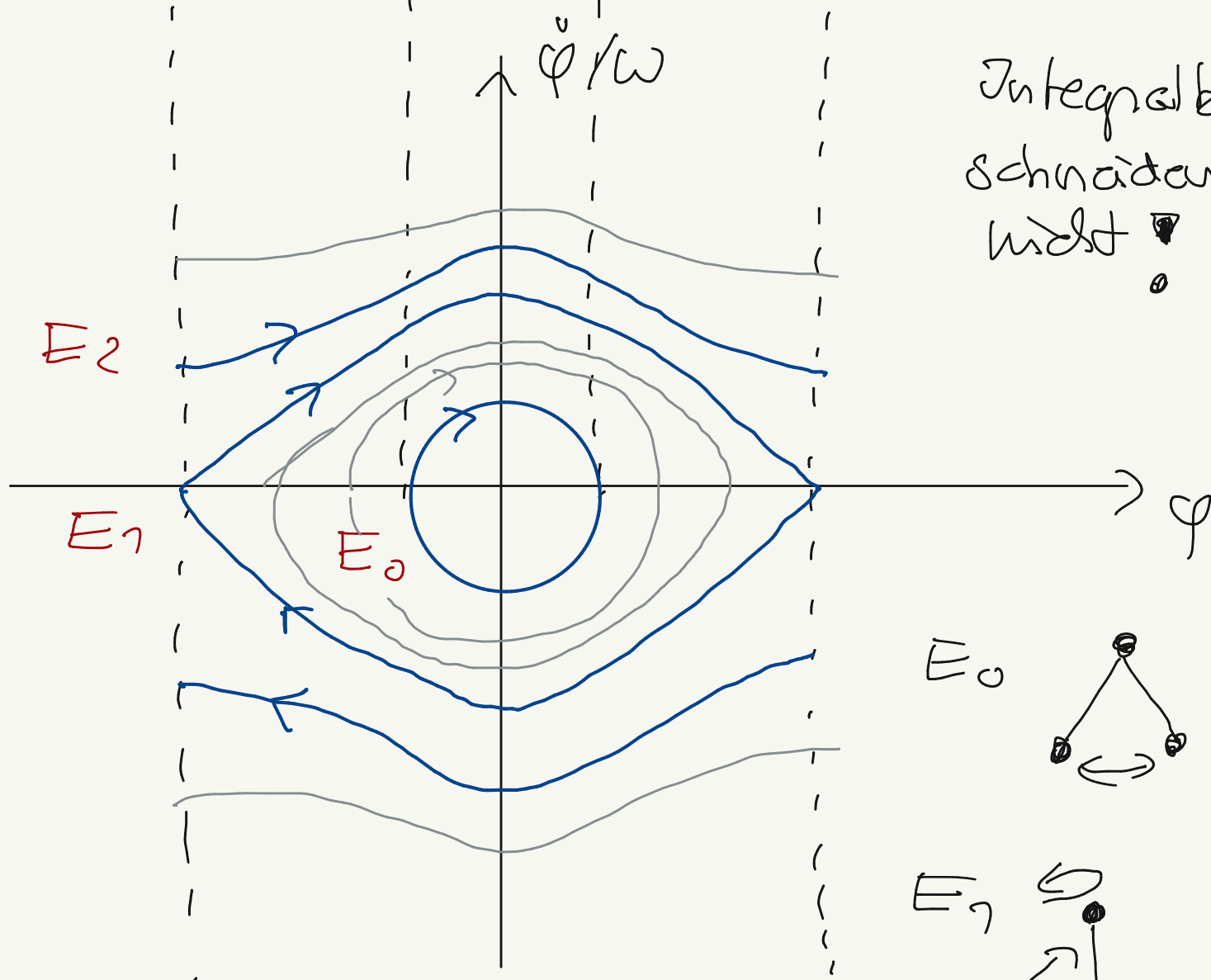
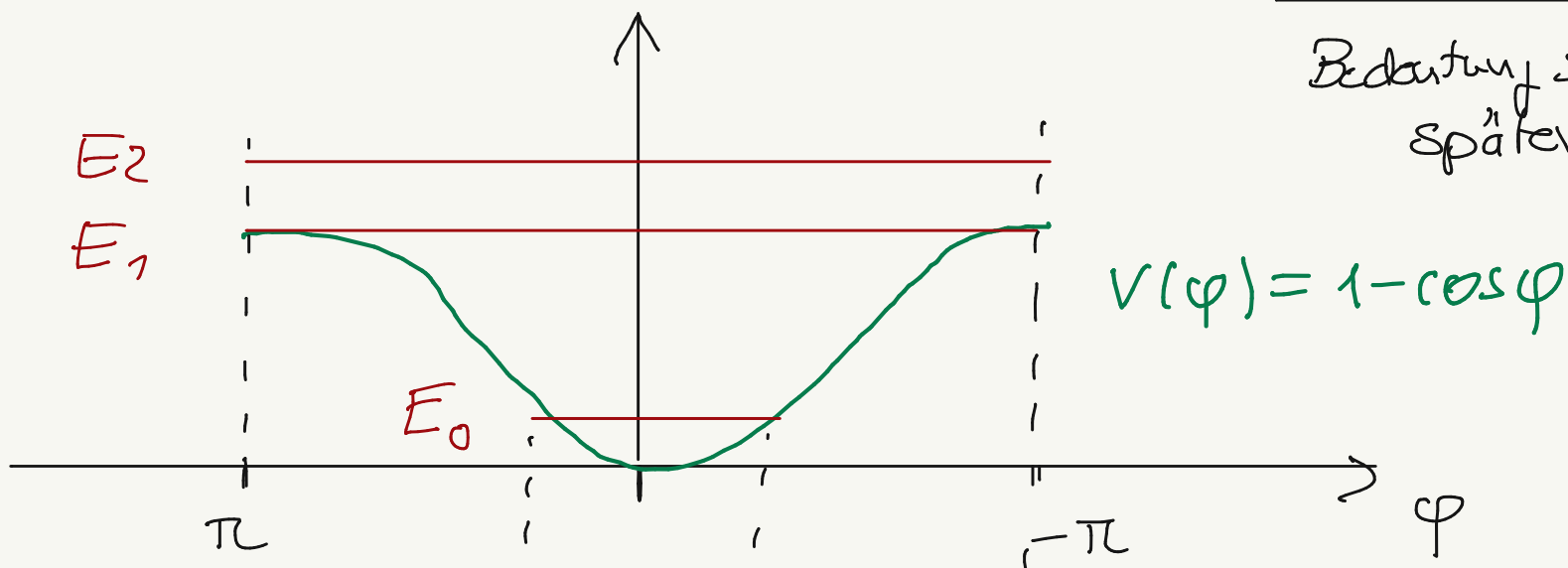
$$\frac{1}{mgl}$$

$$E = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\varphi}^2 + mgl(1 - \cos \varphi) = \text{konst}$$

$$\varepsilon = \frac{E}{mgl} = \frac{1}{2\omega^2} \dot{\varphi}^2 + 1 - \cos \varphi$$

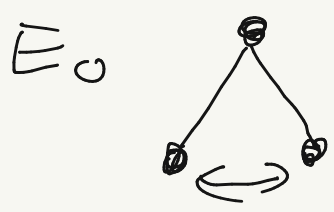
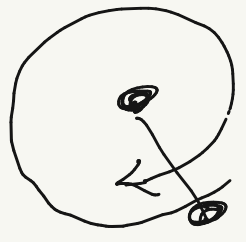
$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

Bedeutung siehe
später



Integralkurven
schneiden sich
nicht!

E_2



Periodendauer

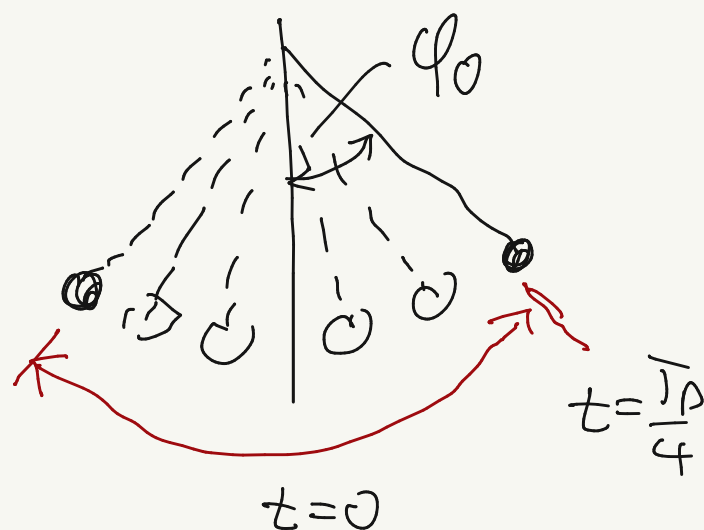
$$\varepsilon = \frac{1}{2\omega^2} \dot{\varphi}^2 + 1 - \cos \varphi \stackrel{!}{=} 1 - \cos \varphi_0$$

φ_0 ist maximaler Winkel ausschlag

$$\dot{\varphi}_0 = 0$$

$$\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt} = \sqrt{2\omega^2(\cos \varphi - \cos \varphi_0)}$$

$$dt = \frac{d\varphi}{\sqrt{2\omega^2(\cos \varphi - \cos \varphi_0)}}$$



$$\frac{T_p}{4} = \int_0^{T_p/4} dt = \frac{1}{\sqrt{2}\omega} \int_0^{\varphi_0} d\varphi \frac{1}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \varphi_0}}$$

$$\cos \varphi - \cos \varphi_0 = 2 \left\{ \frac{1 - \cos \varphi_0}{2} - \frac{1 - \cos \varphi}{2} \right\} = 2 \left\{ \sin^2 \frac{\varphi_0}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right\}$$

$$k = \sin^2 \frac{\varphi_0}{2}$$

$$\sin \frac{\varphi}{2} = \sqrt{k} \sin \vartheta$$

$$\frac{d(\sin \frac{\varphi}{2})}{d\vartheta} = \frac{1}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \frac{d\varphi}{d\vartheta} = \sqrt{k} \cos \vartheta \quad \varphi = \varphi_0 \Rightarrow \vartheta = \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\varphi_0} \frac{1}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \varphi_0}} d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{\varphi_0} \frac{1}{\sqrt{\sin^2 \frac{\varphi_0}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2}}} d\varphi$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{k - k \sin^2 \vartheta}} d\vartheta$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} d\varphi \frac{\cancel{2\cos\varphi} \sqrt{k}}{\cos \frac{\varphi}{2} \cancel{\sqrt{k} \cos\varphi}} = \int_0^{\pi/2} d\varphi \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\varphi}{2}}}$$

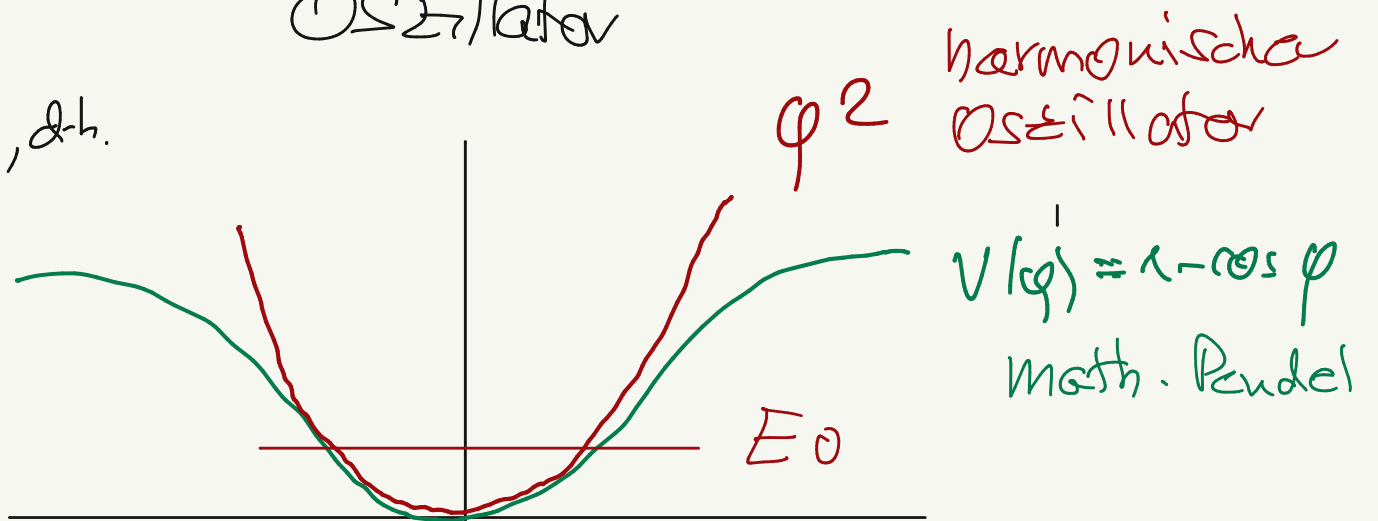
$$= \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k \sin^2 \varphi}} = K(k) \quad \text{vollständig Elliptisches Integral}$$

$$T_P = 4 \frac{1}{\omega} K(k) = 4 \sqrt{\frac{L}{g}} K(k)$$

• Das mathematische Pendel und der harmonische Oszillator

für kleine Energie, d.h.
kleine Auslenkung φ

$\Rightarrow V(\varphi)$
quadratisch in φ



$$k = \sin^2 \frac{\varphi_0}{2} \text{ klein} \quad \frac{1}{\sqrt{1-u}} \approx 1 + \frac{1}{2}u$$

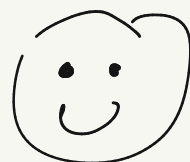
$$\begin{aligned} \text{d.h.} \quad K(k) &= \int_0^{\pi/2} d\varphi \frac{1}{\sqrt{1 - k \sin^2 \varphi}} \approx \int_0^{\pi/2} d\varphi \left(1 + \frac{k}{2} \sin^2 \varphi \right) \\ &= \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{k}{4} \right) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$T_p \approx 4 \frac{1}{\omega} \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{k}{4} \right) = \frac{2\pi}{\omega} \left(1 + \sin^2 \frac{\varphi_0}{2} \right)$$

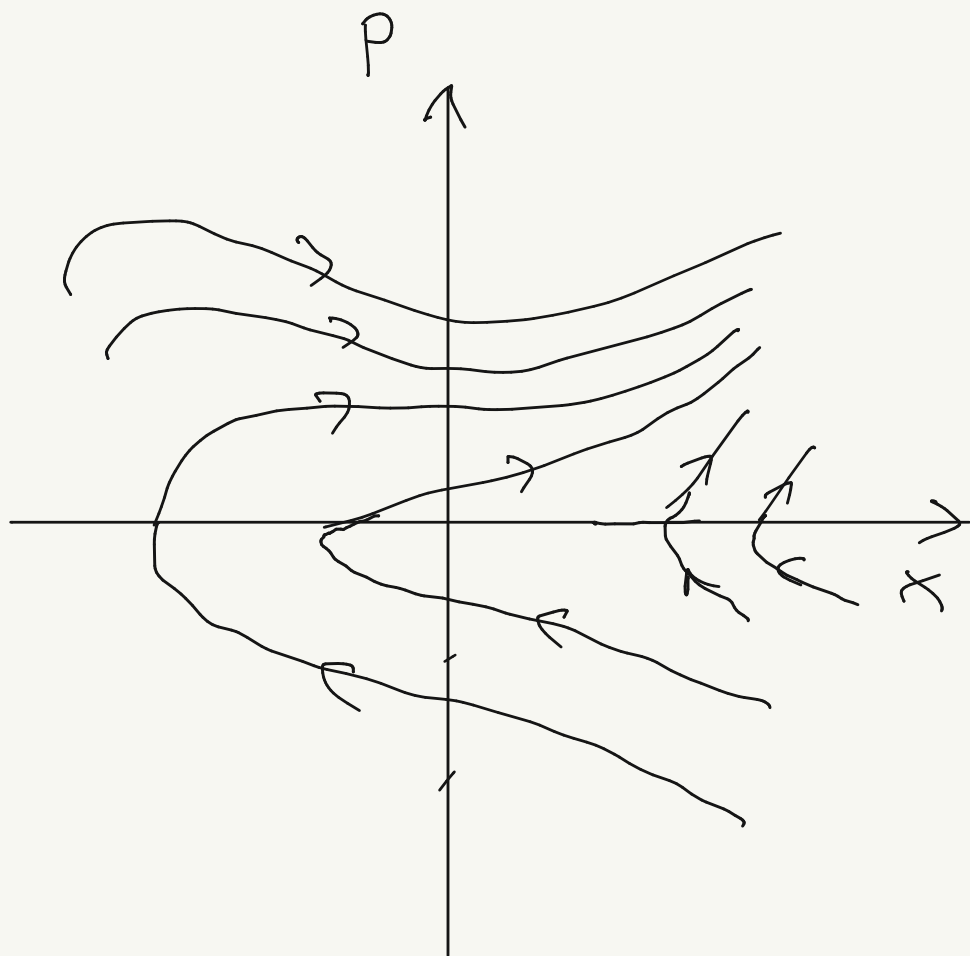
$$T_p \xrightarrow{\varphi_0 \rightarrow 0} \frac{2\pi}{\omega}$$

harmonischer Oszillator

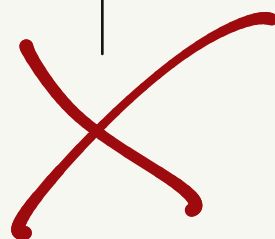
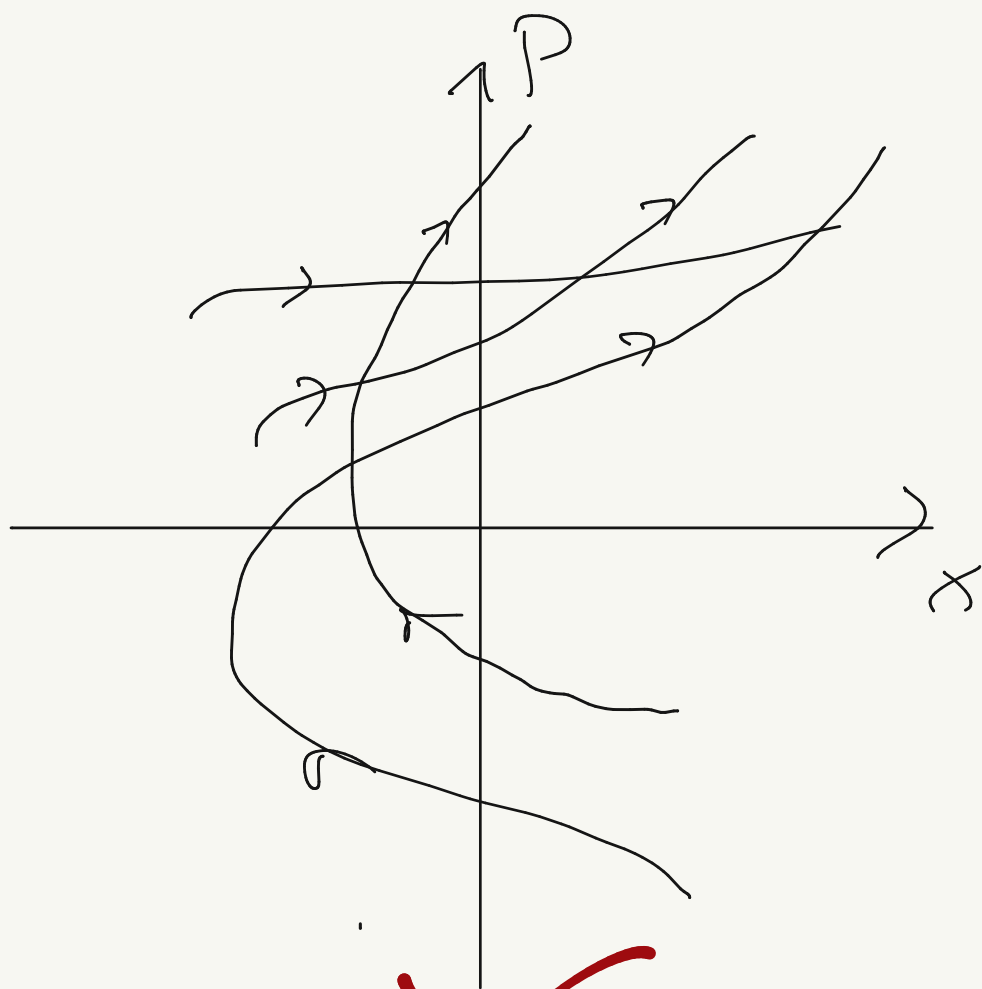


Satz: (Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen der Bewegungsgleichungen.)

Falls $\vec{F}(\vec{r}, \vec{p}, t)$ stetig und bzgl. $\vec{r}$ und $\vec{p}$ differenzierbar
 $\Rightarrow$ Für jedes $\vec{r}(t_0), \vec{p}(t_0), t_0$ gibt es genau eine Lösung der Bewegungsgleichung



yes



no

III. 6 Drehimpuls und Drehmoment

Nachdem wir eindimensionale Probleme diskutiert haben, wollen wir nun die Mechanik eines MP in 3D betrachten

lex secunda $m \ddot{\vec{r}} = \vec{F}$

wir hatten

$$m \ddot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} = \vec{F} \cdot \dot{\vec{r}}$$

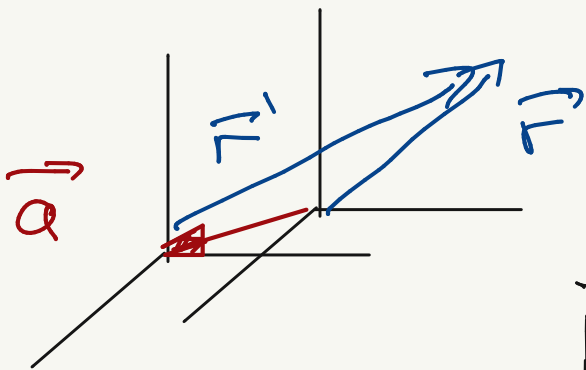
$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^2 \right) = -P$$

nun

$$m \vec{r} \times \ddot{\vec{r}} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Def: Die Größe $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ heißt
Drehmoment der Kraft $\vec{F}$ am Ort $\vec{r}$
bezgl. des Ursprungs

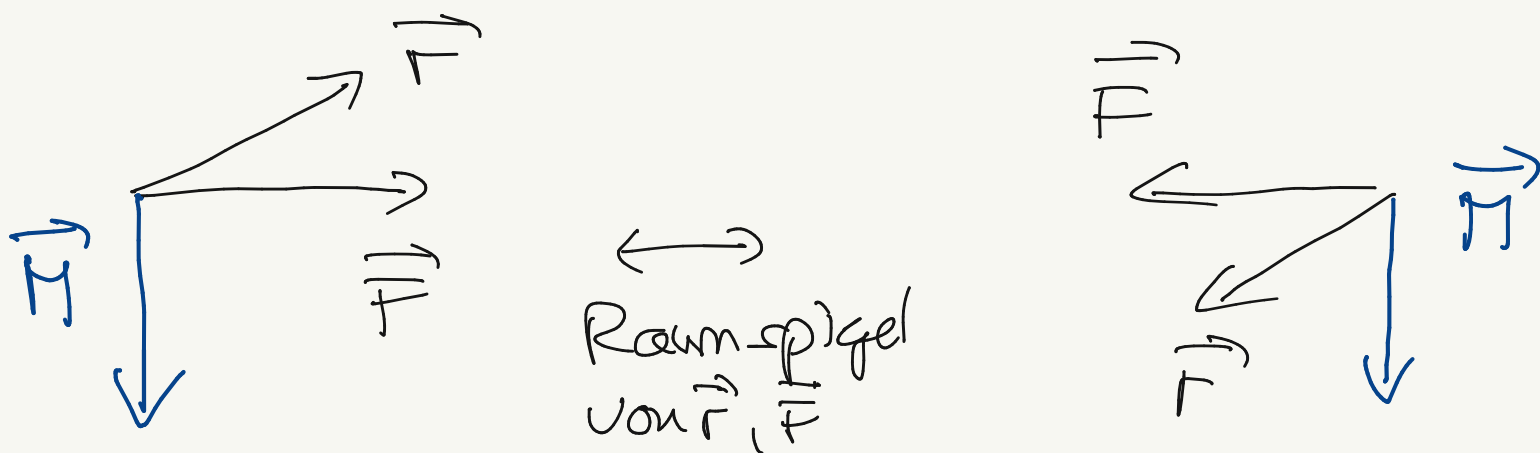
Bem: (i) $\vec{M}$ hängt von der Wahl des
Bezugspunktes (Koordinatenurspr.)
ab



$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{a}$$

$$\begin{aligned} \vec{M}' &= \vec{r}' \times \vec{F} = (\vec{r} - \vec{a}) \times \vec{F} \\ &= \vec{M} - \vec{a} \times \vec{F} \end{aligned}$$

(ii) $\vec{r}$ and $\vec{F}$ sind polare Vektoren, $\Rightarrow$
 $\vec{M}$ ist ein axialer Vektor



es gilt

$$m \vec{r} \times \ddot{\vec{r}} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}$$

$$= \frac{d}{dt} (\vec{r} \times m \dot{\vec{r}}) = \vec{M} \quad \left((\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}}) \stackrel{!}{=} 0 \right)$$

Def: Die Größe $\boxed{\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}} = \vec{r} \times m \dot{\vec{r}}$ wird
Drehimpuls eines Massenpunktes der Masse m
 am Ort $\vec{r}$ bzgl. des Koordinatenursprungs
 genannt

Bem: (i) auch $\vec{L}$ hängt von der Wahl des
 Koordinatenursprungs ab
 (ii) $\vec{L}$ ist ebenfalls ein axialer Vektor

Satz: (Drehimpulsatz)

Die zeitliche Änderung des Drehimpulses entspricht dem angreifenden Drehmoment

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$$

ähnlich zur lex secunda $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$

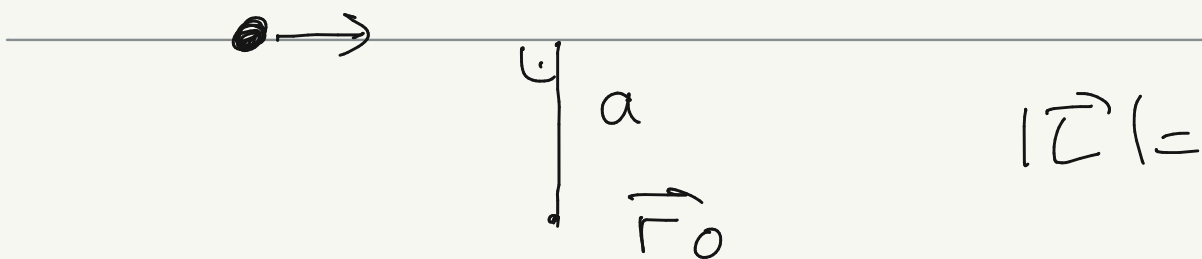
Satz: (Drehimpulserhaltungssatz)

Besitzt ein Kraftfeld $\vec{F}$ einen Punkt $\vec{r}_0$ bzgl. dem das Drehmoment $\vec{M} = (\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{F}$ verschwindet, so ist der Drehimpuls eines Massenpunktes bzgl. $\vec{r}_0$ zeitlich konstant, d.h. eine Erhaltungsgröße

"bzgl. $\vec{r}_0$ " heißt hier Verschiebung des Koordinatenursprungs nach $\vec{r}_0$

Bem.: (i) $\vec{M} = 0$ falls $\vec{F} = 0$ (trivial)

$$m\vec{a} = \text{konst}$$



$$|\vec{L}| = amv = \text{konst}$$

(ii) $\vec{M} = 0$ falls $\vec{F}$ Zentralkraftfeld und der Koordinatenursprung = Mittelpunkt des Zentralkraftfeldes

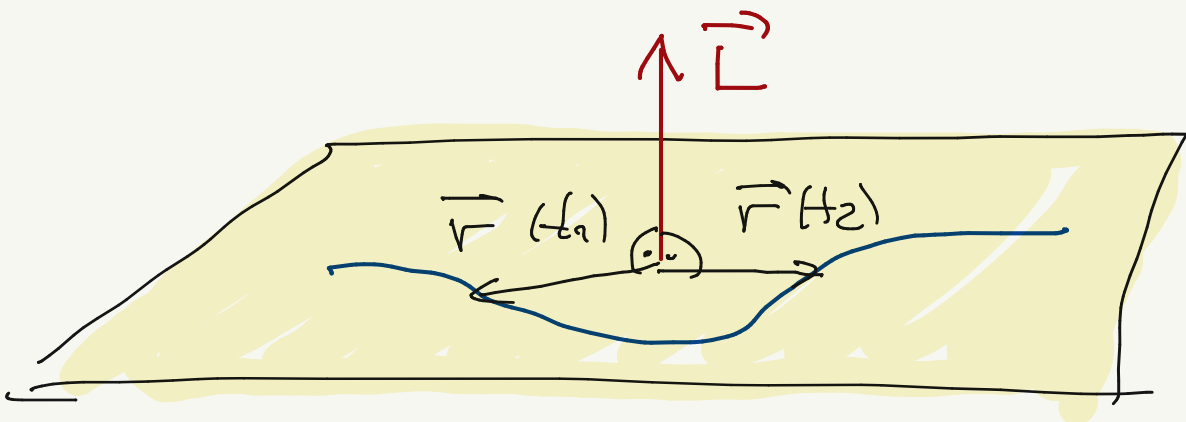
$$\vec{F} = F \hat{e}_r$$

$$\vec{r} \times \vec{F} = r F \hat{e}_r \times \hat{e}_r = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = 0$$

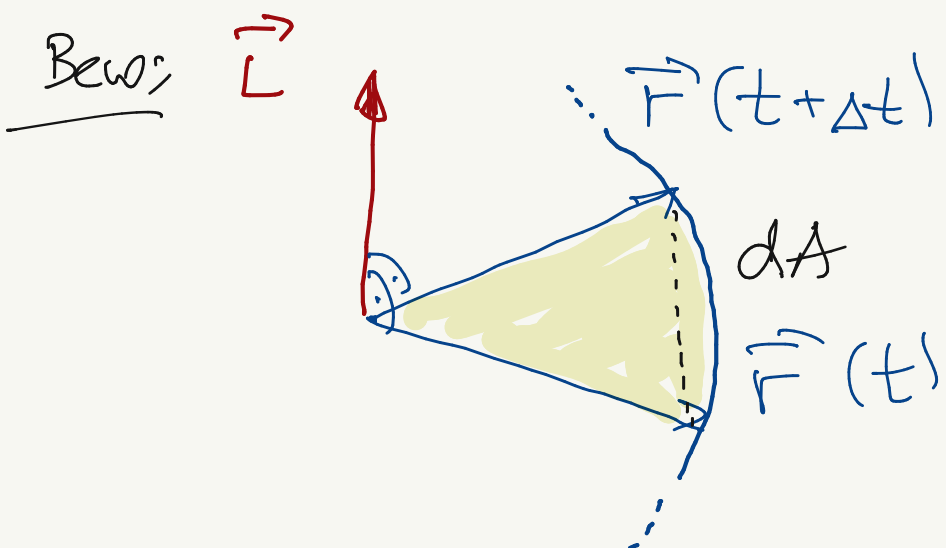
Satz: Bei Drehimpulserhaltung bewegt sich der Massenpunkt auf einer zum Drehimpuls senkrechten Ebene, die den Koordinatenursprung (Bezugspunkt des Drehimpulses) enthält

$$\vec{r} \cdot \vec{L} = \vec{r} \cdot (\vec{r} \times \vec{p}) = 0$$



Satz: (Flächensatz)

Bei Drehimpulserhaltung überstreicht der Radiusvektor (Fahrstrahl) des Massenpunktes in gleichen Zeiten gleiche Flächen



$$\begin{aligned} dA &= \frac{1}{2} |\vec{r}(t) \times \vec{r}(t+dt)| \\ &= \frac{1}{2} |\vec{r}(t) \times (\vec{r}(t) + \dot{\vec{r}}(t) dt)| \\ &= \frac{1}{2} dt |\vec{r} \times \dot{\vec{r}}| = \frac{|\vec{L}|}{2m} dt \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{dA}{dt} = \frac{|\vec{L}|}{2m} = \frac{L}{2m} = \text{konst}$$

III.7 Zur Integration dreidimensionaler Probleme mit zeit- und geschwindigkeits-unabhängiger Zentralkraft

betrachten zeit- und geschwindigkeitsunabhängige Zentralkraft

$$\vec{F}(\vec{r}, \vec{p}, t) = F(r) \vec{e}_r$$

(i) $\vec{F}$ ist konservativ $\Rightarrow$ E ist erhalten!

$$E = \frac{m}{2} \vec{v}^2 + V(r) = \text{konst.} \quad \text{eine Bedingung}$$

(ii) Drehmoment bzgl. Ursprung verschwindet

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{L} \text{ ist erhalten!}$$

$$\vec{L} = m(\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) = \text{konst} \quad \text{drei Bedingungen}$$

Man nennt E und $\vec{L}$ erste Integrale der Bewegung

Folgerungen:

Konstanz von $\vec{L}$ beschränkt die Bewegung auf eine Ebene senkrecht zu $\vec{L}$

da $\vec{r} \cdot \vec{L} = \vec{r} \cdot (\vec{r} \times m \dot{\vec{r}}) = 0$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\vec{r} \perp \vec{L}}}$$

• nun OBD $\vec{L} = L \hat{e}_z \Rightarrow xy \text{ Ebene}$

$$\Rightarrow \vec{r} = (r, \vartheta, \varphi) \stackrel{!}{=} (r, \frac{\pi}{2}, \varphi)$$

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r} \hat{e}_r + r \dot{\varphi} \hat{e}_\varphi$$

$$\vec{L} = -m r \hat{e}_r \times (\dot{r} \hat{e}_r + r \dot{\varphi} \hat{e}_\varphi)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{=0}$

$$\hat{e}_r \times \hat{e}_\varphi = \hat{e}_\vartheta$$

$$= -m r^2 \dot{\varphi} \hat{e}_\vartheta \Big|_{\vartheta = \frac{\pi}{2}} = m r^2 \dot{\varphi} \hat{e}_z$$

$$\boxed{\vec{L} = m r^2 \dot{\varphi} \hat{e}_z}$$

$$\boxed{\dot{\varphi} = \frac{L}{m r^2}}$$

• mit Energieerhaltung

$$v^2 = \dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 = \dot{r}^2 + \frac{L^2}{m^2 r^2}$$

$$\boxed{E = \frac{m}{2} v^2 + V(r) = \frac{m}{2} \dot{r}^2 + \frac{L^2}{2m r^2} + V(r) = \text{const}}$$

wie 1D kinetische
Energie

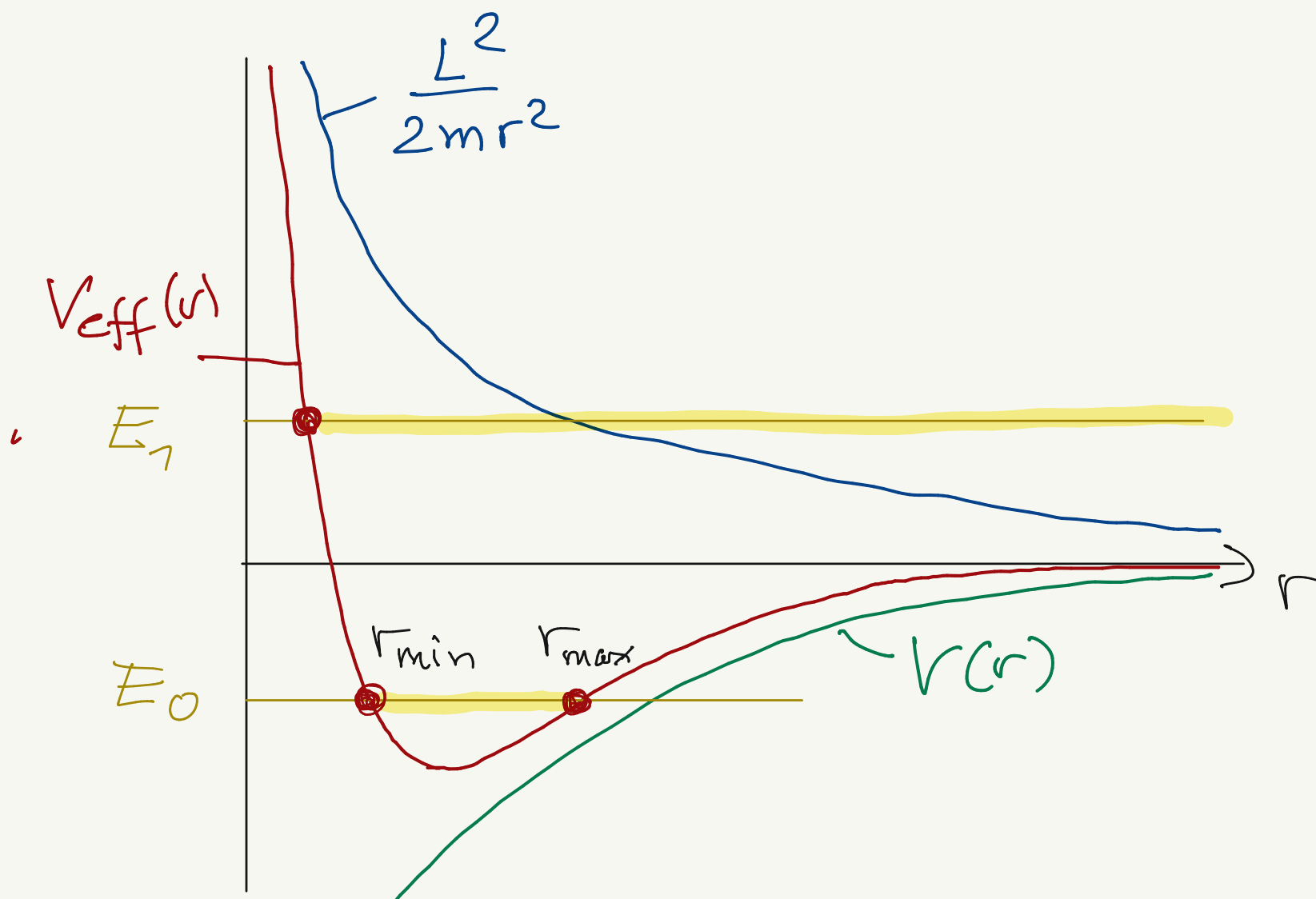
wie effektives
1D Potential

Def: $\frac{L^2}{2mr^2}$ heißt Zentrifugalpotential

$$V_{\text{eff}}(r) = V(r) + \frac{L^2}{2mr^2}$$

effektives
Potential
der Radial-
bewegung

$\Rightarrow$ das 3D Problem ist nun auf ein 1D
Problem mit $V_{\text{eff}}(r)$ und $0 \leq r \leq \infty$ reduziert 



Forderungen: (i) erlaubter Bereich

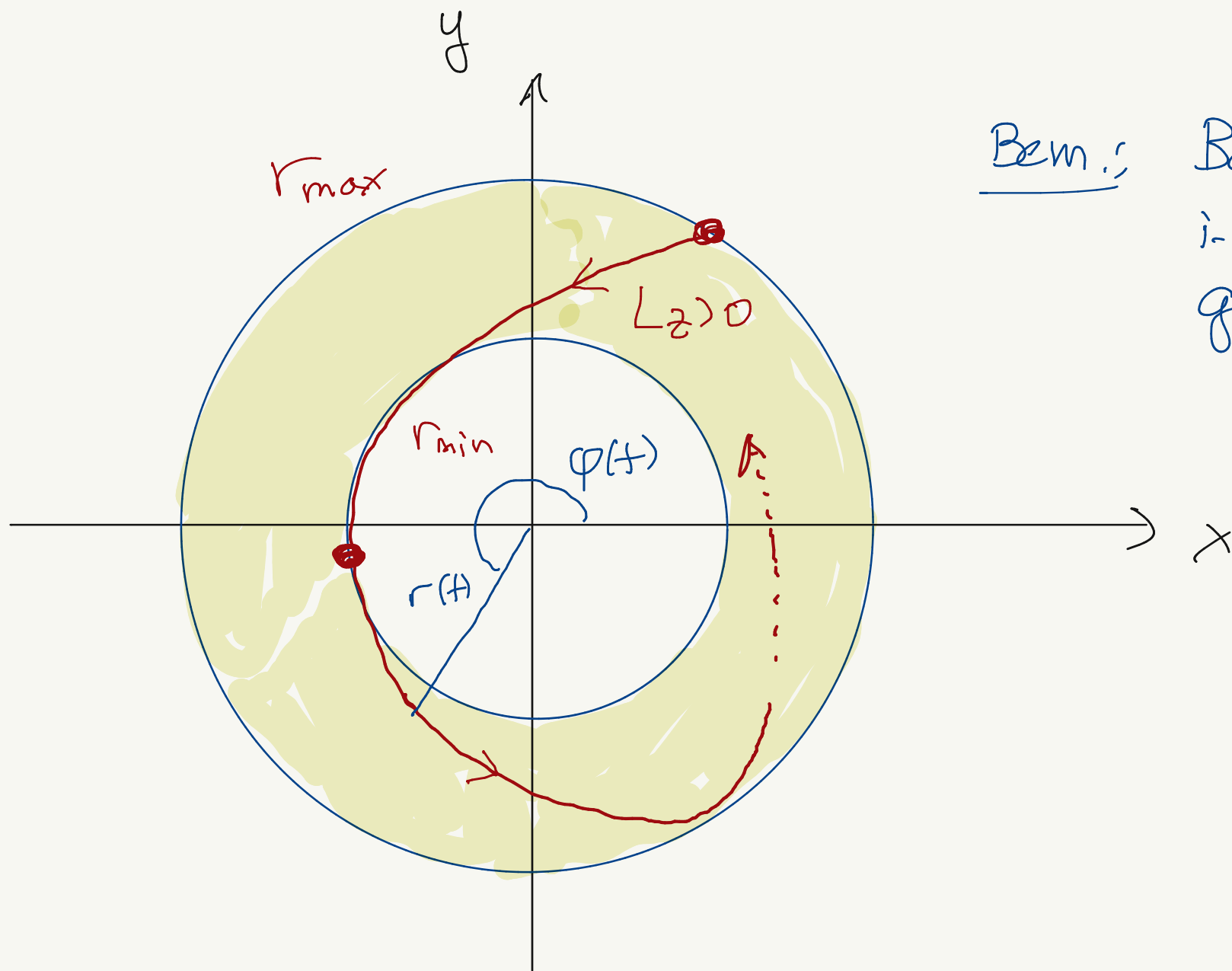
$$E - V_{\text{eff}}(r) \geq 0$$

(ii) Umbkehrradialen der Bewegung

$$E - V_{\text{eff}}(r_0) = 0 \quad \dot{r}_0 = 0$$

betrachten gebundene Bewegung:
 E_0

(x, y) - Ebene
 $(\perp \text{ zu } \vec{L})$



Bem.: Bewegung
i.A. nicht
geschlossen!

Lösung wie in 1D

$$\dot{r}^2 = \frac{2}{m} (E - V_{\text{eff}}(r))$$

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m} (E - V_{\text{eff}}(r))}$$

$$t - t_0 = \int_{r_0}^r dr' \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{m} (E - V_{\text{eff}}(r'))}}$$

$$\Rightarrow r = r(t)$$

allgemeine
implizite
Lösung der
Bewegung
für $r = r(t)$

außerdem $L = mr^2 \dot{\varphi} \Rightarrow \varphi = \varphi(r)$ ($\varphi = \varphi(t)$ ist klar!)

$$d\varphi = \frac{L}{mr^2} dt = \frac{L}{mv^2} \frac{dr}{\dot{r}}$$

$$= \frac{L}{mr^2} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m} (E - V_{\text{eff}}(r))}}$$

$$\varphi - \varphi_0 = \int_{r_0}^r dr' \frac{L}{r'^2 \sqrt{\frac{2}{m} (E - V_{\text{eff}}(r'))}}$$

allgemeine
implizite
Lösung der
Bewegung
für $\varphi = \varphi(r)$

Anfangsbedingungen

(i) $\vec{r}(t=t_0) = (r_0, \frac{\pi}{2}, \varphi_0)$ (Kugelkoordinaten)

(ii) $\dot{\vec{r}}(t=t_0) = (\dot{r}(t=t_0), 0, \dot{\varphi}(t=t_0))$ (Zylinderkoord. $\vartheta = \frac{\pi}{2} \rightarrow z=0$)

$$\dot{\varphi}(t=t_0) = \frac{L}{mr_0^2}$$

$$\dot{r}(t=t_0) = \sqrt{\frac{2}{m} (E - V(r_0) + \frac{L^2}{2mr_0^2})}$$

d.h. $r_0, \varphi_0, \vec{L}, E$ ausreichend (6 Größen!)