

(B) Flächen- und Volumenintegrale skalare Fkt.

(C) Oberflächenintegrale vektorieller Funktionen

das machen wir später
in Vektoranalysis II

→ jetzt erst mal zur Physik

III. Mechanik des Massenpunktes I

III.1. Newtonsche Axiome

lex prima (1. Newtonsche Axiome)

Es gibt Koordinatensysteme in denen ein kräftefreier Körper (Massenpunkt) im Zustand der Ruhe oder der geradlinig, gleichförmigen Bewegung verharbt. Solche Systeme heißen Inertialsysteme

- Wenn Σ ein Inertialsystem ist, so ist jedes System Σ' welches sich relativ zu Σ mit konstanter Geschwindigkeit $\vec{u}$ bewegt ebenfalls ein Inertialsystem

Bew: $\sum_i \vec{r}_i = 0$

$\Sigma \rightarrow \Sigma'$ $\vec{r}' = \vec{r} + \vec{u}(t - t_0) + \vec{r}_0$ $\vec{r}' = 0$

Postulat: Jeder Körper besitzt eine skalarwertige Eigenschaft, gegeben durch eine positive reelle Zahl die wir träge Masse m nennen. Die Größe ist additiv

$$m_1 + m_2 = m_{\text{ges}}$$

Kraft:

- Ursache der Bewegungsänderung
- vektorielle Größe da $\vec{a}, \vec{r}$ Vektoren

$$\vec{F}$$

Lex secunda (2. Newtonsche Axiom)

In einem Inertialsystem ist die zeitliche Änderung des Impulses eines Körpers (Massenpunktes) gleich der an ihm angreifenden Kraft

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{u})}{dt} = \vec{F}$$

Bem:

- definiert sowohl $\vec{F}$ als auch m
- in Mechanik betrachten wir $\vec{F}$ als gegebene Größe (Ursache von Kräften später)

Superpositionsprinzip der Kräfte

Wirken an einem Körper mehrere Kräfte $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots$

$$\vec{F} = \sum_{j=1}^n \vec{F}_j$$

- Kräfte hängen i.A. vom Ort $\vec{r}$, der Geschwindigkeit $\vec{v}$ des KP sowie der Zeit t ab

$$\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t) \quad \text{Kraftfeld}$$

Wichtige Kräfte

(i) Schwerkraft m_s : schwere Masse

$$\vec{F} = m_s \vec{g}$$

Äquivalenzprinzip

$$m_s \sim m \quad \Rightarrow \quad m_s = m$$

(ii) Zentralkräfte $\exists$ Inertialsystem mit

$$\vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t) = F(r, \dot{r}, t) \hat{e}_r$$

isotrop harmon. Oszillator

$$F = -m\omega^2 r$$

• Gravitation

$$\vec{F} = - \gamma \frac{mM}{r^2} \quad \gamma > 0$$

• Coulombkraft

$$\vec{F} = \frac{q_1 q_2}{4\pi \epsilon_0 r^2}$$

(iii) Lorentzkraft auf bewegte Ladungen

$$\vec{F} = q \vec{E}(\vec{r}, t) + q \vec{v} \times \vec{B}(\vec{r}, t)$$

$\vec{E}, \vec{B}$ gegebene Vektorfelder (Eldynamik)

(iv) Reibungskraft

$$\vec{F} = -\alpha(\vec{v}) \vec{v}$$

$$\alpha(\vec{v}) = \text{konst} > 0$$

$$\alpha(\vec{v}) = \vec{\alpha} \cdot \vec{v}$$

Stokes'sche Reibung
Newton'sche $\rightarrow$ $+$ $-$

Lex tertius (3-Newton'sches Axiom)

Wirken zwei Körper (Massenpunkte) Kräfte aufeinander aus, und sei $\vec{F}_{12}$ die Kraft von Körper 2 auf Körper 1, sowie $\vec{F}_{21}$ die Kraft von Körper 1 auf Körper 2, so gilt

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \quad \text{actio} = \text{reactio}$$

III. 2 Elementare Probleme der Kinematik

$\Rightarrow$ siehe Vorlesung ExPhys 1

Wurf im Schwerfeld

$$\vec{F} = -mg\hat{e}_z = (0, 0, -mg)$$

2. NA $m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F}$

- unabhängige Bewegung in x, y, z

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = 0$$

$$\frac{dx}{dt} = v_{x0}$$

$$x = v_{x0}t + x_0$$

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = 0$$

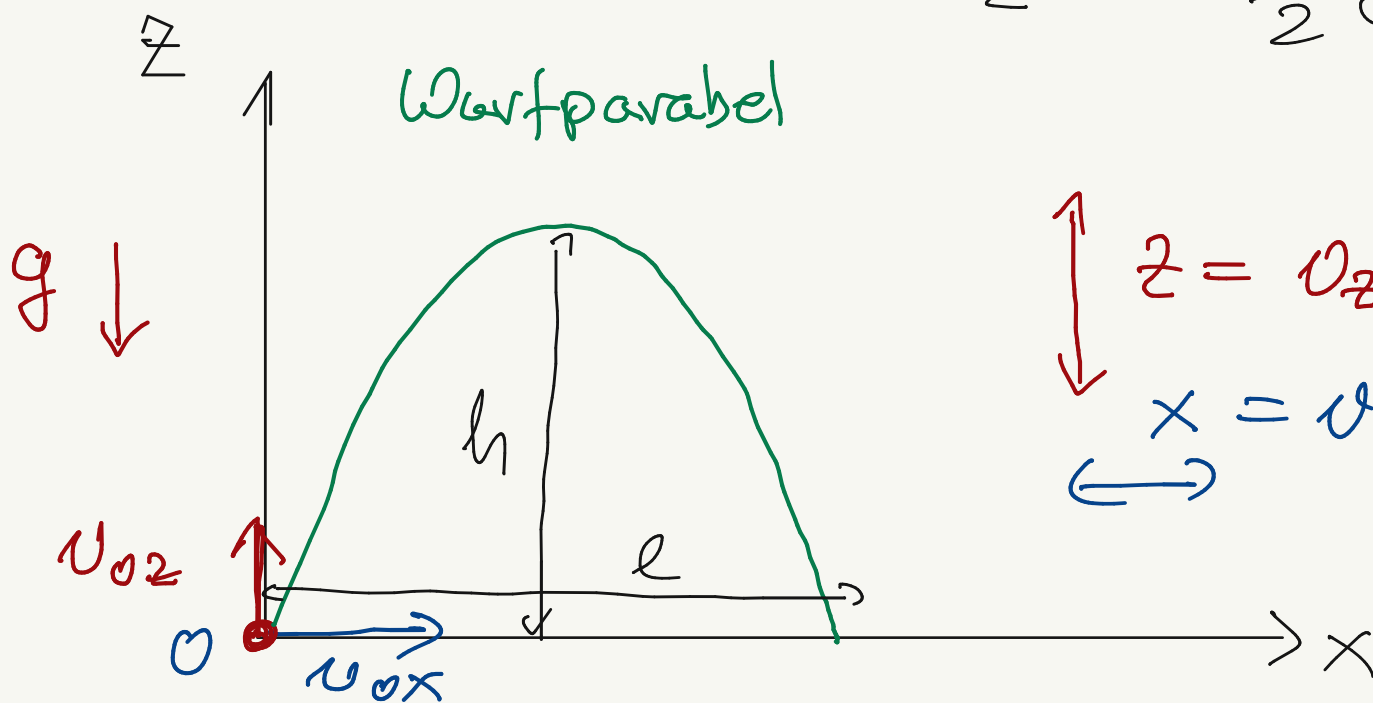
$$\frac{dy}{dt} = v_{y0}$$

$$y = v_{y0}t + y_0$$

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = -mg$$

$$\frac{dz}{dt} = -mgt + v_{z0}$$

$$z = -\frac{m}{2}gt^2 + v_{z0}t + z_0$$



$$z = v_{z0}t - \frac{m}{2}gt^2$$
$$x = v_{x0}t$$

Form der Parabel $z = \frac{x}{v_{x0}}$

$$z = \frac{v_{z0}}{v_{x0}} x - \frac{m}{2} g \frac{x^2}{v_{x0}^2} \quad \text{quadratische Gleichung}$$

• Wurfweite $\times$ Werte für $z=0$

$$x_1 = 0$$

$$0 = v_{x0} v_{z0} \cancel{x_2} - \frac{m}{2} g \cancel{x_2^2}$$

$$x_2 = \frac{2 v_{x0} v_{z0}}{m g} = \ell$$

• Werfhöhe

$$\frac{dz}{dt} = 0 = -m g t_m + v_{ze} \quad t_{\max} = \frac{v_{z0}}{m g}$$

$$\begin{aligned} \underline{h} = z_{\max} &= v_{z0} t_{\max} - \frac{m g}{2} t_{\max}^2 \\ &= \frac{v_{z0}^2}{m g} - \frac{m g}{2} \frac{v_{z0}^2}{m^2 g^2} = \underline{\underline{\frac{1}{2} \frac{v_{z0}^2}{m g}}} \end{aligned}$$

III.3 Arbeit, Leistung, Energie; Energieerhaltung

(A) Begriff der Arbeit

Um einen Körper (Massenpunkt) in einem Kraftfeld zu bewegen, bedarf es einer "Anstrengung". Diese wollen wir jetzt quantifizieren.

Def: Die bei einer infinitesimalen Verschiebung $d\vec{r}$ eines Massenpunktes im Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$ geleistete infinitesimale Arbeit ist

$$\delta W = -\vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$1 \rightarrow 2 \quad W_{21} = - \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$$

W_{21} hängt i.A. ab von

(i) $\vec{r}_1, \vec{r}_2$

(ii) $\vec{F}$

(iii) Weg von $\vec{r}_1$ nach $\vec{r}_2$

(iv) zeitlichen Bewegungsablauf

Bem: $-\vec{F} \cdot d\vec{r}$ ist i.A. kein vollständiges Differential, daher " δW " nicht " dW "

Def: Als Leistung bezeichnet man die pro Zeiteinheit geleistete Arbeit

$$P = \frac{dW}{dt} = - \frac{d}{dt} \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$$

$$= - \frac{d}{dt} \int_{t_0}^t dt' \dot{\vec{r}}(t') \cdot \vec{F}(\vec{r}(t'), \dot{\vec{r}}(t'), t')$$

$$\Rightarrow P = -\vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) \cdot \dot{\vec{r}} = -\vec{F} \cdot \vec{v}$$

2. N.A. $m \ddot{\vec{r}} = \vec{F}$

$$m \ddot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} = \vec{F} \cdot \dot{\vec{r}} = -P$$

$$\hookrightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^2 \right) = -P$$

Def.: Der Ausdruck $T = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}^2 = \frac{1}{2} m v^2$ wird als kinetische Energie des Massenpunktes bezeichnet

es gilt offensichtlich

$$\frac{d}{dt} T = -P$$

besondere Kraftfelder

Def.: Ein Kraftfeld $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$ heißt konservativ in einem Gebiet $G \in \mathbb{R}^3$ falls es sich in G als negativer Gradient einer skalaren Funktion $V(\vec{r})$ darstellen lässt

$$\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} V(\vec{r}) = -\text{grad } V(\vec{r})$$

Man nennt $V(\vec{r})$ das Potential von $\vec{F}$

Für konservative Kraftfelder gilt

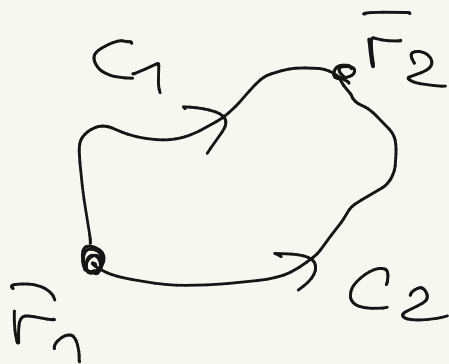
$$\delta W = - \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \vec{\nabla} V(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = dV$$

$$\Rightarrow \delta W = dW \quad \text{vollst. Differential}$$

Wir hatten in der Diskussion von Vektorfeldern folgende Eigenschaften gesehen

Satz Ein Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r})$ ist dann und nur dann konservativ in einem Gebiet $G \in \mathbb{R}^3$ wenn

- (i) Die geleistete Arbeit bei Verschiebung eines MP im Kraftfeld innerhalb G ist wegunabhängig



$$\int_{C_1} d\vec{r} \cdot \vec{F} = \int_{C_2} d\vec{r} \cdot \vec{F}$$

$$\Rightarrow \oint d\vec{r} \cdot \vec{F} = 0$$

- (ii) wenn G einfach zusammenhängend ist gilt

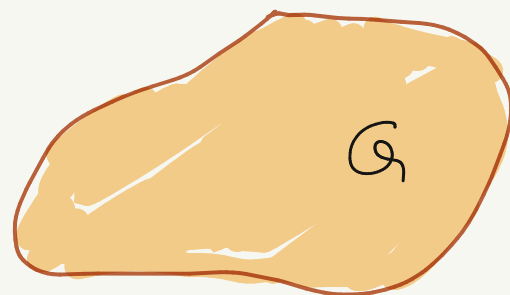
$$\text{rot } \vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F} = 0 \quad \forall \vec{r} \in G$$

Bem;

(i) gilt auch für nicht einfach
zusammenhängende Gebiete G



nicht einfach zshgd.



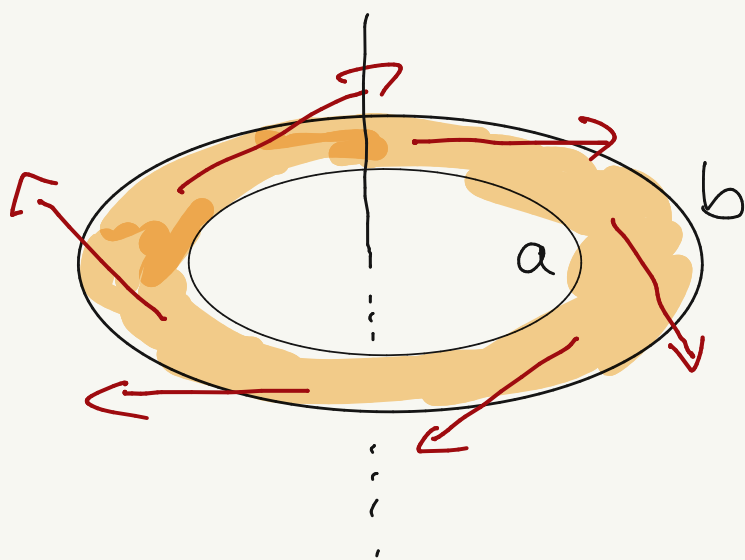
einfach zshgd

Bspl;

$$\vec{F} = F \hat{e}_\varphi$$

$$0 < a \leq r \leq b$$

$$F = \text{const.}$$



es gilt $\text{rot } \vec{F} = 0$ in G

also $\oint_C d\vec{r} \cdot \vec{F} \neq 0$

Satz:

Zeit- und Geschwindigkeitsunabhängige
Kraftfelder in einer Dimension sind
stets conservativ

$$\vec{F} = F(x) \hat{e}_x = - \frac{dV(x)}{dx} \hat{e}_x$$

$$V(x) = \int_{x_0}^x dx' F(x') + \text{const.}$$



Satz: Zeit- und geschwindigkeit unabhängige
Zentralkraftfelder sind stets konservativ

$$\vec{F} = F(r) \vec{e}_r = - \frac{dV(r)}{dr} \vec{e}_r = - \vec{\nabla} V(r) \vec{e}_r$$

$$V(r) = \int_{r_0}^r dr' F(r') + \text{const.} \quad \checkmark$$

• Warum sind konservative Kraftfelder so interessant?

Satz: Bewegt sich ein Massenpunkt in einem konservativem Kraftfeld $\vec{F}$ mit Potential $V(\vec{r})$, so existiert eine Erhaltungsgröße, die wir Energie nennen

$$E = V(\vec{r}) + T \quad \frac{dE}{dt} = 0$$

Energieerhaltungssatz

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{dV}{dt} = - \frac{dT}{dt} \Rightarrow \frac{d}{dt}(V+T) = 0$$

allgemein

$$\vec{F} = \vec{F}_{\text{konservativ}} + \vec{F}_{\text{dissipativ}} \\ = - \vec{\nabla} V + \vec{F}_{\text{diss}}$$

$$\frac{d}{dt} [V+T] = \frac{d}{dt} E = \vec{F}_{\text{diss}} \cdot \vec{v}$$

Die Änderung der Energie ist gleich der (negativen) Leistung dissipativer Kräfte

Bem.: $\exists$ energiehaltende aber nicht konservative Kräfte, z.B. Lorentzkraft in konstantem Magnetfeld

$$\vec{F}_L = q \vec{v} \times \vec{B} \neq -\vec{\nabla} V$$

$$\text{aber } \vec{F}_L \cdot d\vec{r} = q \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{B} \right) \cdot d\vec{r} \stackrel{!}{=} 0$$

spatprodukt mit
zwei parallelen Vektoren

III.4 Zur Integration eindimensionaler Probleme mit ortsabhängiger Kraft

hier 1D und nur ortsabhängige Kraft $\vec{F} = F(x) \vec{e}_x$

$$\Rightarrow F(x) = - \frac{dV(x)}{dx}$$

es gilt $\frac{d}{dt} E = \frac{d}{dt} (T+V) = 0$

$$E = \frac{m}{2} \dot{x}^2 + V(x) = \text{konst.}$$